演習問題　5.1

$\lambda_1 = u - a$ に対する左固有ベクトルは

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\rho}{2a} \end{pmatrix}$$

で与えられる．式(5.3.3)に代入すると

$$L_1 \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho}{2a}\frac{du}{dt} = 0$$

これより

$$du - \frac{a}{\rho}d\rho = 0$$

演習問題　5.2

演習問題 2.5 より，式(2P. 6)の行列 A およびその固有値は

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a$$

で与えられる．これらの固有値に対する右固有ベクトルは

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/\rho \\ a^2 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a/\rho \\ a^2 \end{pmatrix}$$

となる．ただし，第 1 成分が 1 となるように規格化してある．これらの右固有ベクトルに対する左固有ベクトルは

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\rho}{2a} & \frac{1}{2a^2} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{2a} & \frac{1}{2a^2} \end{pmatrix}$$

これより固有値$\lambda = u$ に対する左固有ベクトルは L_2 で与えられる．このとき式(5.3.3)は

$$L_2 \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{a^2}\frac{dp}{dt} = 0$$

$a^2 = \gamma p/\rho$ に注意すると

$$\frac{\gamma}{\rho}d\rho - \frac{dp}{p} = 0$$

上式は積分できて

$$\ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = \ln s = \text{const.}$$

これより，$\lambda_2 = u$ に対応する特性曲線上でエントロピー s が一定となることがわかる．