

演習問題 7.1

圧縮または膨張の性質をもつ極めて弱い波 (マッハ波に近い波) 前後の圧力の関係式は, 式 (6.1.18) より

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)$$

ここで

$$\varepsilon \equiv \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{\Delta p}{p_1} \quad \dots \textcircled{1}$$

一方, 図 6.1.2 より

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{u_{n2}}{u_{n1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{\gamma + 1} \left(\frac{2}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \gamma - 1 \right)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\gamma + 1) \tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} - (\gamma - 1) \right\} \\ \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} - 1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\gamma + 1) \tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} - (\gamma + 1) \right\} \\ -\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 \sin^2 \beta} &= \frac{\gamma + 1}{2} \left\{ \frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} - 1 \right\} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} M_1^2 \sin^2 \beta - 1 &= \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta \left\{ 1 - \frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} \right\} \\ &= \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \sin \beta \{ \sin \beta - \cos \beta \tan(\beta - \theta) \} \\ &= \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \sin \beta \frac{\sin \beta \cos(\beta - \theta) - \cos \beta \sin(\beta - \theta)}{\cos(\beta - \theta)} \\ &= \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos(\beta - \theta)} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで $\beta \cong \mu \gg \Delta\theta$ より, 式② (但しここでは $\theta \rightarrow \Delta\theta$ とおく) は

$$M_1^2 \sin^2 \beta - 1 \cong \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\sin \beta \sin \Delta\theta}{\cos \beta \cos \Delta\theta + \sin \beta \sin \Delta\theta}$$

$\sin \Delta\theta \cong \Delta\theta$, $\cos \Delta\theta \cong 1$ より,

$$M_1^2 \sin^2 \beta - 1 \cong \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\sin \beta \cdot \Delta\theta}{\cos \beta + \sin \beta \cdot \Delta\theta}$$

$\cos \beta \gg \sin \beta \cdot \Delta\theta$ より

$$M_1^2 \sin^2 \beta - 1 \cong \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \tan \beta \cdot \Delta\theta \quad \dots \textcircled{3}$$

式③を式①に代入すると式(7.1.3)を得る.

$$\frac{\Delta p}{p_1} \cong \gamma M_1^2 \tan \beta \cdot \Delta \theta = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \Delta \theta \quad \dots \textcircled{4}$$

次に, このマッハ波程度強さの波の前後におけるエントロピー変化は, 式(6.1.22)から

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = -\ln \left[\left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right\}^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \left\{ \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \right]$$

ここで $M_1^2 \sin^2 \beta - 1 = m$ (式①より $\frac{\Delta p}{p_1} = \varepsilon$ のオーダーと同じ) とおいて計算を進めると

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} m \right\}^{\frac{1}{\gamma - 1}} (1 + m)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left\{ \frac{(\gamma - 1)(m + 1) + 2}{(\gamma + 1)} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \right] \quad \dots \textcircled{5}$$

ここで

$$\left\{ \frac{(\gamma - 1)(m + 1) + 2}{(\gamma + 1)} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left\{ \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} m + 1 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

に注意すると, $M_1 \sin \beta$ が 1 に近いとき $m \ll 1$ となり, 式⑤の 3 つの { } 項はいずれも $C \ln(1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon \ll 1$) の形をとる. さらに

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \dots$$

したがって, 式⑤右辺は

$$\begin{aligned} \frac{s_2 - s_1}{R} &= \frac{1}{\gamma - 1} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma + 1} m - \frac{1}{2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} m \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} m \right)^3 - \dots \right\} \\ &\quad - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\{ m - \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{3} m^3 - \dots \right\} \\ &\quad + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\{ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} m - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} m \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} m \right)^3 - \dots \right\} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} m \left\{ \frac{2}{\gamma + 1} - 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right\} - \frac{\gamma}{2(\gamma - 1)} m^2 \left\{ \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2} - 1 + \frac{(\gamma - 1)^2}{(\gamma + 1)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{\gamma}{3(\gamma - 1)} m^3 \left\{ \frac{8\gamma^2}{(\gamma + 1)^3} - 1 + \frac{(\gamma - 1)^3}{(\gamma + 1)^3} \right\} + O(m^4) \\ &= \frac{\gamma}{3(\gamma - 1)} m^3 \frac{1}{(\gamma + 1)^3} \{ 8\gamma^2 - 6\gamma^2 - 2 \} + O(m^4) \\ &= \frac{2\gamma(\gamma + 1)(\gamma - 1)}{3(\gamma - 1)(\gamma + 1)^3} m^3 + O(m^4) \\ &= \frac{2\gamma}{3(\gamma + 1)^2} m^3 + O(m^4) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2\gamma}{3(\gamma + 1)^2} m^3 + O(m^4) \quad \dots \textcircled{6}$$

したがって、式⑥よりマッハ波程度の強さの波の前後におけるエントロピー変化は

$$m = M_1^2 \sin^2 \beta - 1$$

の3次のオーダーとなる。これは式①より $\left(\frac{\Delta p}{p_1}\right)^3 \approx (\varepsilon)^3$ のオーダーであることが分かる。

さらに、これは式③より $\Delta\theta$ の3次のオーダーとなる。

$$\therefore \Delta S \sim (\Delta\theta)^3$$

演習問題 7.2

図 7.1.1 に示す穏やかに変化する凹曲面による一つの極めて弱い（マッハ波程度の）圧縮波による圧力増分は、次の式(7.1.3)で与えられる。

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{\delta p}{p_1} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \delta\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで $\delta\theta$ は流れの偏角であり、この圧縮波のすぐ後方の壁面の向きと一致する。そこで、この緩やかに変化する曲面を、図 7.1.2 のように角度が $\delta\theta$ だけ変化する n 個の連続した圧縮コーナーで近似し、最終的に $n\delta\theta = \theta$ を満たすように面の向きが変化するものとする（図 7.1.2 は膨張コーナーを表す図であり、ここでは $\delta\theta$ を逆向きにとる圧縮コーナーを考えている）。式①より δp は $\delta\theta$ のオーダーであり、次式で表すことができる。

$$\delta p \cong \delta\theta$$

したがって、曲面の最後と最初の圧力変化は次式となる。

$$p_{\text{out}} - p_{\text{in}} \sim n\delta p \sim n\delta\theta = \theta$$

ここで演習問題 7.1 よりエントロピーの変化は

$$s_{\text{out}} - s_{\text{in}} \sim n(\delta\theta)^3 = \theta(\delta\theta)^2$$

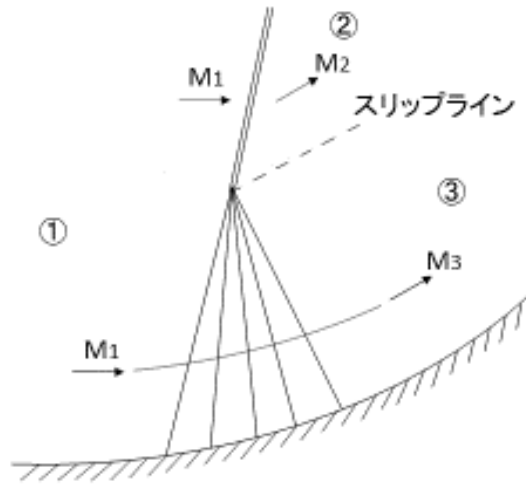
となり、衝撃波通過後の流れのエントロピー増加は $(\delta\theta)^2$ 程度と小さい。これは下図の領域①→領域③の流れが等エントロピー的变化であることを示す。一方、領域①→領域②の流れは斜め衝撃波によるエントロピーの増加を伴う。このため領域②と領域③の領域を分けるスリップライン(すべり線)が存在する。このスリップラインを挟んで圧力は等しく

$$p_{\textcircled{2}} = p_{\textcircled{3}}$$

となるが、速度の大きさ（ただし向きは同じ）をはじめ他の物理量は異なる。

$$u_{\textcircled{2}} \neq u_{\textcircled{3}}$$

したがって、領域②の圧力は領域③と同程度であり、角度 θ の凹角面による衝撃波後方の流れに比べて圧力の減少は小さく、衝撃波強さ（式①）は弱い。



演習問題 7.3

式(6.2.3)より

$$\begin{aligned}
 M_1^2 \sin^2 \beta - 1 &= \frac{\tan \theta}{2 \cot \beta} \{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2\} \\
 &= \frac{\tan \theta}{2 \cot \beta} \{M_1^2 (\gamma + 1) - 2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)\}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \left(1 + \frac{\tan \theta}{\cot \beta}\right) &= \frac{\tan \theta}{2 \cot \beta} M_1^2 (\gamma + 1) \\
 \therefore M_1^2 \sin^2 \beta - 1 &= \frac{\frac{\tan \theta}{2 \cot \beta}}{1 + \frac{\tan \theta}{\cot \beta}} M_1^2 (\gamma + 1) \\
 &= \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\tan \theta}{\cot \beta + \tan \theta} \\
 &= \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
 &= \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta} \\
 &= \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \theta}{\cos(\beta - \theta)} \quad \dots (7.1.1)
 \end{aligned}$$

演習問題 7.4

$\beta = \mu + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) より

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \cos(\mu + \varepsilon) = \cos \mu \cos \varepsilon - \sin \mu \sin \varepsilon \\ &= \cos \mu - \varepsilon \sin \mu \\ &= \frac{1}{M_1} \left\{ \sqrt{M_1^2 - 1} - \varepsilon \right\} \\ \therefore \cos^2 \beta &= \frac{1}{M_1^2} \left\{ (M_1^2 - 1) - 2\varepsilon \sqrt{M_1^2 - 1} + \varepsilon^2 \right\}\end{aligned}$$

$\varepsilon \ll 1$ より

$$\cos^2 \beta \approx \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \right) \quad \dots (7.1.5)$$

参考までに式(7.1.6)の導出を述べておく. 式(7.1.4)より

$$\frac{(V + dV)^2}{V^2} = \left(1 + \frac{dV}{V} \right)^2 = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2(\beta - \delta\theta)}$$

$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, $\delta\theta \ll 1$ より

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \delta\theta)} \cong \frac{\cos \mu}{\cos \mu + \sin \mu \cdot \delta\theta}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} &\cong \frac{\cos \mu}{\cos \mu + \delta\theta \cdot \sin \mu} - 1 \\ &\cong \frac{-\delta\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \mu} - 1} + \delta\theta} \\ &\cong \frac{-\delta\theta}{\sqrt{M_1^2 - 1} + \delta\theta} \\ &\cong -\frac{\delta\theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}\end{aligned}$$

演習問題 7.5

式(7.2.2)より

$$\ln V = \ln a + \ln M$$

$$\therefore \frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M} \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に式(7.2.3)より

$$\ln a_0^2 - \ln a^2 = \ln \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

$$\therefore -2 \frac{da}{a} = \frac{\gamma-1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} M dM$$

よって

$$\frac{da}{a} = \frac{-\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2 dM}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{1}{M}$$

式①に代入すると

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad \dots (7.2.4)$$

式(7.2.1)に代入して積分すると

$$\int d\theta = \int \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad \dots (7.2.5)$$

演習問題 7.6

(1) エネルギー保存則 (全エンタルピー保存式) 式(4.5.1)より

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_*^2$$

よって

$$\frac{a_*^2}{V^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{V^2} \frac{a^2}{\gamma-1} \right) \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}$$

$$= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M^2}$$

マッハ角 μ を用いると, $\sin \mu = 1/M$ より,

$$\frac{a_*^2}{V^2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} (1 - \cos^2 \mu) = (\sin^2 \mu + \cos^2 \mu) - \frac{2}{\gamma+1} \cos^2 \mu$$

$$= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cos^2 \mu + \sin^2 \mu \quad \dots \textcircled{1}$$

(2) 式①の両辺を微分すると (a_* は音速点の音速であり, 定数として扱う)

$$\begin{aligned} -2V^{-3}a_*^2 dV &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} 2 \cos \mu (-\sin \mu) d\mu + 2 \sin \mu \cos \mu d\mu \\ &= 2 \sin \mu \cos \mu \left(-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + 1 \right) d\mu \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

式①を式②に代入して a_* を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{\sin \mu \cos \mu \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - 1 \right)}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cos^2 \mu + \sin^2 \mu} d\mu \\ &= \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - 1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \tan^2 \mu} \tan \mu d\mu \end{aligned}$$

したがって

$$\sqrt{M^2-1} \frac{dV}{V} = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - 1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \tan^2 \mu} d\mu \quad \dots \textcircled{3}$$

(3) 式(7.2.1)は式②を用いると

$$\int d\theta = \int \sqrt{M^2-1} \frac{dV}{V} = \int \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - 1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \tan^2 \mu} d\mu$$

ここで上式右辺の積分を行う. この種の積分は次式で与えられる.

$$\int \frac{dx}{c \tan^2 x + d} = \frac{1}{d-c} \left[x - \sqrt{\frac{c}{d}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{c}{d}} \tan x \right) \right]$$

$c = 1$, $d = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \int d\theta &= \int \sqrt{M^2-1} \frac{dV}{V} \\ &= \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - 1} \left[\mu - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan \mu \right) \right] + C \\ &= \mu - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan \mu \right) + C \end{aligned}$$

$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$ より

$$\int d\theta = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{M^2 - 1}} \right) + C$$

ここで, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ($x \geq 0$) より

$$\begin{aligned} \int d\theta &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot (M^2 - 1)} \right) + C \\ &= \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} + C \right) \end{aligned}$$

$M = 1$ のとき上式右辺がゼロとなるように積分定数 C を選ぶと

$$\begin{aligned} \int d\theta &= \int \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} = \int \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - 1}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \tan^2 \mu} d\mu \\ &= \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad \dots (7.2.6) \end{aligned}$$

演習問題 7.7

(1) 質量および運動量保存則の 2 次元極座標表示は以下のようになる。

$$\frac{\partial(\rho r u)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \phi} = 0 \quad \dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad \dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} = -\frac{a^2}{\rho r} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \quad \dots (3)$$

式②と式③の最後の項は, 各領域の気体が等エントロピーのバロトピック流体 ($p = p(\rho)$) として成立する。

(2) 領域②においてもマッハ波に沿う半径方向には物理量に変化がないことから, 式①～式③は次のようになる。

$$\rho \left(u + \frac{dv}{d\phi} \right) + \frac{d\rho}{d\phi} v = 0 \quad \dots (4)$$

$$v \left(\frac{du}{d\phi} - v \right) = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$v \left(\frac{dv}{d\phi} + u \right) = -\frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{d\phi} \neq 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

したがって式⑤より,

$$v = \frac{du}{d\phi}$$

ここで式⑥右辺は, 流れが領域②の各マッハ波を過ぎるにつれて密度は減少 (圧縮の場合は増加) するため $\frac{d\rho}{d\phi} \neq 0$ となる. 式④ $\times \frac{a^2}{\rho}$ - 式⑥ $\times v$ より $\frac{d\rho}{d\phi}$ の項を消去すると次式となる.

$$a^2 u + a^2 \frac{dv}{d\phi} - v^2 \frac{dv}{d\phi} - v^2 u = (a^2 - v^2) \left(\frac{dv}{d\phi} + u \right) = 0$$

式⑥を考慮すると次式を得る.

$$a = v = \frac{du}{d\phi} \quad \dots \textcircled{7}$$

(3) エネルギー保存則より定常流れに対して

$$\frac{1}{2} w^2 + h = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma RT}{\gamma - 1}$$

音速の式 (式(1.2.7)) および式⑦より

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} = \frac{u^2}{2} + \frac{\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \frac{u_{\max}^2}{2}$$

したがって,

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = u_{\max}^2 \quad \dots \textcircled{8}$$

(4) 式⑧において $\frac{du}{d\phi} = v$ (≥ 0) より

$$\frac{du}{d\phi} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \sqrt{u_{\max}^2 - u^2}$$

したがって

$$\frac{du}{\sqrt{u_{\max}^2 - u^2}} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} d\phi$$

両辺積分し、 $\phi = 0$ で $u = 0$ とおくと次式を得る.

$$u = u_{\max} \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right)$$

また v は式⑦より

$$v = \frac{du}{d\phi} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} u_{\max} \cos\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right)$$

さらに流れのマッハ数 M については、 $M^2 = \frac{w^2}{a^2} = \frac{u^2+v^2}{v^2} = \frac{u^2}{v^2} + 1$ (式⑦より $a = v$)

$$M^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tan^2\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right) + 1 \quad \dots \textcircled{9}$$

式⑨より

$$\sqrt{M^2-1} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right) = \frac{u}{v}$$

したがって、

$$\phi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2-1)$$

(5) プラントルマイヤー関数 $\nu(M)$ は、 $M = 1$ の流れ方向、すなわち $\nu(1) = 0$ から膨張してマッハ数 M になったときの流れ方向の偏角で定義される。そこで、マッハ数 M のときのマッハ線方向 (マッハ角 μ) と ν および ϕ の関係が必要になる。流れの方向 w とマッハ線のなす角が μ で、マッハ線に直角な方向の速度成分が v だから (図 1)、流れの偏向角 ν は次式となる。

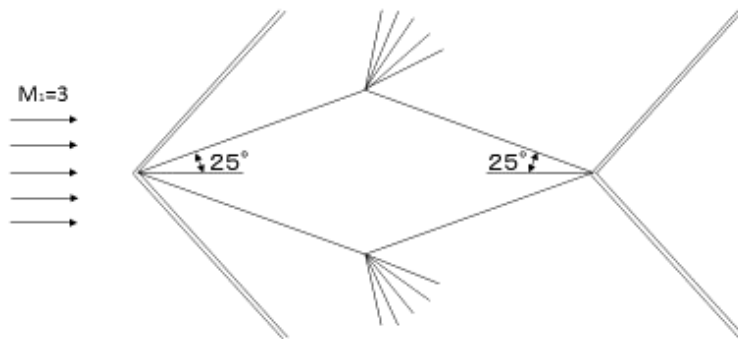
$$\begin{aligned} \nu(M) &= \phi + \mu - \frac{\pi}{2} \\ &= \phi - \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \phi - \tan^{-1} \frac{u}{v} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2-1) - \tan^{-1} \sqrt{M^2-1} \quad \dots (7.2.6) \end{aligned}$$

演習問題 7.8

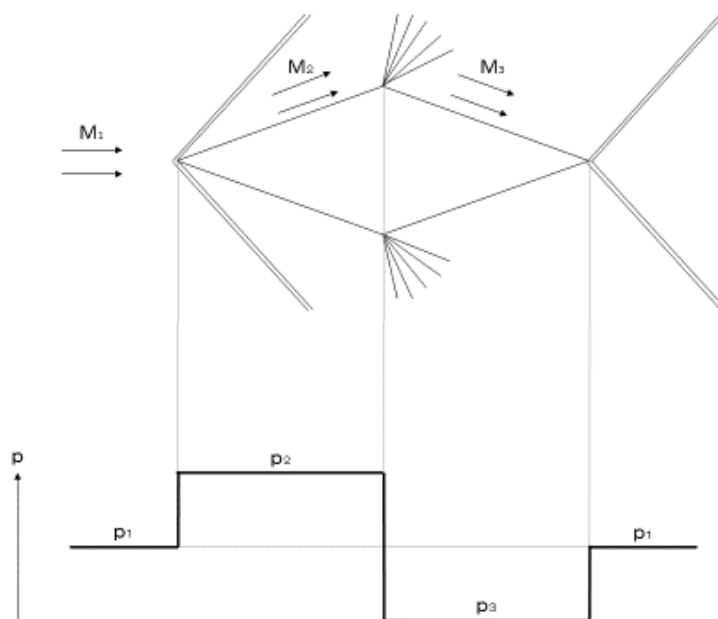
$$v(M = \infty) - v(M = 5) = 130.45^\circ - 76.92^\circ = 53.53^\circ$$

演習問題 7.9

流れの圧縮が生じる前縁と後縁で斜め衝撃波が、また流れの膨張が生じるひし形中央角部にプラントルマイヤー膨張扇が下図のように発生する。



圧力は衝撃波背後で増加し、プラントルマイヤー膨張後は減少するため、下図のようにひし形の前半部で高く、後半部では低くなる。このため理想流体においても抵抗が発生する（造波抵抗）。



このときの抵抗係数 C_d を求めておく. 上流の圧力は $p_1 = 1$ より p_2 は式(6.1.18)で与えられ, 衝撃波角 β は式(6.2.3)(図 6.2.1)より $\theta = 25^\circ$, $\beta = 44.1^\circ$ となる. このとき式(6.1.21)より $M_2 = 1.72$ となる. これより, 式(6.1.18)より

$$p_2 = p_1 \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right\} = 4.93$$

次に, プラントルマイヤー膨張扇後の流れは, 上流側 $M_2 = 1.72$ の流れが偏向角 $\theta_2 = 50^\circ$ まで等エントロピー的に加速し, マッハ数 M_3 となる. したがって圧力は減少する. 式(7.2.7)より

$$\nu(M_3) = \theta_2 + \nu(M_2) = 50^\circ + 18.4^\circ = 68.4^\circ$$

これより

$$M_3 = 4.23$$

等エントロピー流れの圧力とマッハ数の関係式(3.9.1)より

$$p_3 = p_2 \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.122$$

ひし形の一边を 1 とすると, 奥行き方向に単位幅当たりの抵抗 D は上下面を考慮して

$$D = 2(p_2 - p_3) \sin \frac{\theta}{2} = 4.06$$

$$\therefore C_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 2 \cos \frac{\theta}{2}} = 0.356$$

ここで, $\rho_1 U_1^2$ には以下で計算される値を用いた.

$$\left(\frac{U_1}{M_1} \right)^2 = a_1^2 = \gamma \frac{p_1}{\rho_1}$$

また, $M_1 = 3$, $p_1 = 1$ より

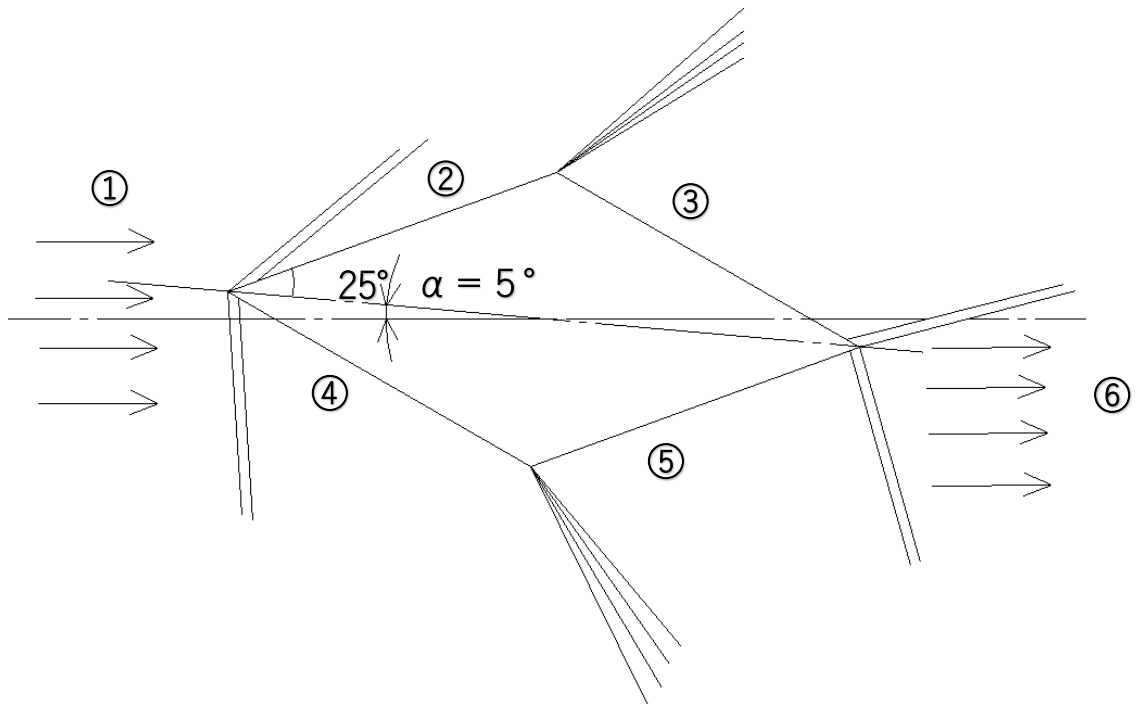
$$\rho_1 U_1^2 = \gamma p_1 M_1^2 = 12.6$$

一方, 揚力 L については, ひし形の上下で圧力がバランスするため

$$L = 0, \quad \therefore C_l = 0$$

演習問題 7.10

図のように, くさびの角部には衝撃波と膨張波が形成され, 後方領域⑥では領域①と同じ方向に流れ出る. そこで, 図のように領域①～領域⑥の領域における圧力を求める.



(i) 領域②について

上流①からの流れの偏角は、 $\theta = 20^\circ$, $M_1 = 3$ より式(6.2.3)(図 6.2.1)から、衝撃波角 $\beta = 37.8^\circ$ となる。演習問題 7.9 と同様に、式(6.1.21)および式(6.1.18)より以下となる。

$$M_2 = 2.0, \quad \frac{p_2}{p_1} = 3.79, \quad \therefore p_2 = 3.79$$

(ii) 領域③について

上流領域②からの流れは膨張して、領域③の面に沿うように 50° 向きを変える。式(7.2.7)より

$$\begin{aligned} \nu(M_3) &= \nu(M_2) + \theta = 26.4^\circ + 50^\circ = 76.4^\circ \\ \therefore M_3 &= 4.95 \end{aligned}$$

したがって、式(3.9.1)より

$$p_3 = p_2 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.0587$$

(iii) 領域④について

(i)と同様に、流れの偏角 $\theta = 30^\circ$, $M_1 = 3$ より、 $\beta = 52.0^\circ$ となる。したがって、式(6.1.21)および式(6.1.18)より

$$M_4 = 1.41, \quad p_4 = 6.36$$

(iv) 領域⑤について

領域④の流れが膨張して、領域⑤の面に沿うように 50° 向きを変える. 式(7.2.7)より

$$\begin{aligned} \nu(M_5) &= \nu(M_4) + \theta = 9.28^\circ + 50^\circ = 59.3^\circ \\ \therefore M_5 &= 3.55 \end{aligned}$$

したがって, 式(3.9.1)より

$$p_5 = p_4 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_5^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.249$$

ひし形の一辺を長さ 1 として, 単位スパン方向の揚力 L と抗力 D を考える. 領域②～領域⑤の面に働く圧力と面の方向から

$$L = (p_4 - p_3) \cos 30^\circ + (p_5 - p_2) \cos 20^\circ = 2.13$$

$$D = (p_4 - p_3) \sin 30^\circ + (p_2 - p_5) \sin 20^\circ = 4.36$$

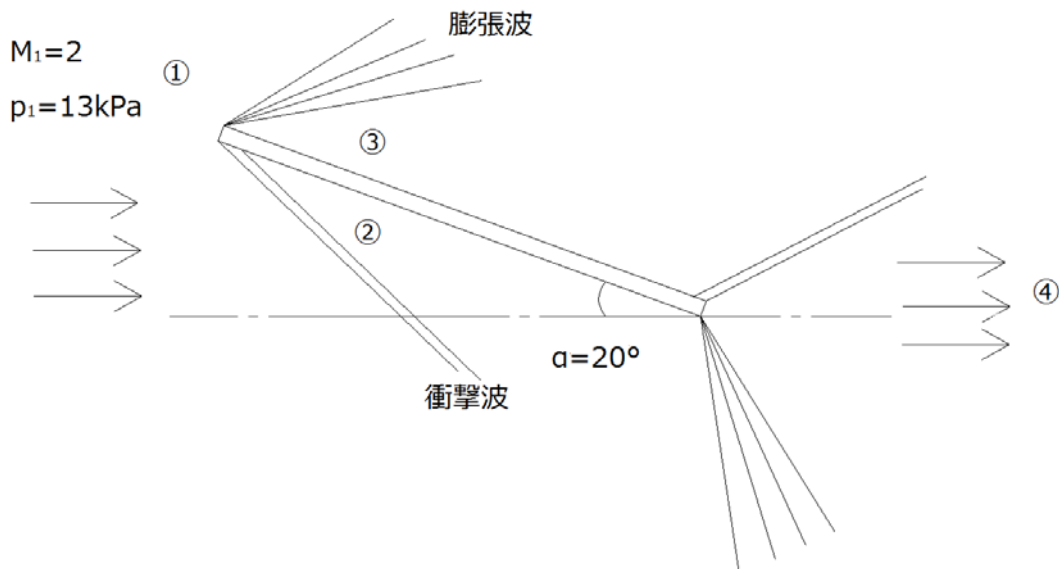
ここで, $\rho_1 U_1^2 = \gamma p_1 M_1^2 = 12.6$ (演習問題 7.9) より

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 \cdot 2 \cos 25^\circ} = 0.187$$

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 \cdot 2 \cos 25^\circ} = 0.382$$

演習問題 7.11

平板翼下面では, はじめに衝撃波が前縁で発生し圧力を上昇させて領域②を形成する. その後は, 後縁部で膨張波を形成し, 領域①と同じ向きに流れる領域④となる. 一方, 平板翼上面については前縁で膨張波, 後縁で衝撃波を形成し領域④へと続く.



このため、下面側の領域②では領域①より圧力が高く、上面側の領域③では反対に圧力が減少し、これが揚力と抗力の発生につながる。

(i) 領域②の圧力 p_2 について

式(6.2.3)(図 6.2.1)より、 $\theta = \alpha = 20^\circ$ を用いて

$$\beta_1 = 53.4^\circ$$

よって、式(6.1.18)より

$$p_2 = p_1 \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta_1 - 1) \right\} = 37.0 \text{ kPa}$$

(ii) 領域③の圧力 p_3 について

式(7.2.7)より

$$v(M_3) = v(M_1) + \theta = 26.4^\circ + 20^\circ = 46.4^\circ$$

$$\therefore M_3 = 2.83$$

領域①→領域③は等エントロピー変化するので、式(3.9.1)より

$$p_3 = p_1 \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 3.58 \text{ kPa}$$

(iii) L, D, C_L, C_D について

$$L = (p_2 - p_3) \times 1.8 \times 0.9 \cdot \cos 20^\circ = 50.9 \text{ kN}$$

$$D = L \tan 20^\circ = 18.5 \text{ kN}$$

$$\left(\frac{U_1}{M_1} \right)^2 = a_1^2 = \gamma \frac{p_1}{\rho_1}$$

よって

$$\rho_1 U_1^2 = \gamma M_1^2 p_1 = 72.8 \text{ kPa}$$

したがって、 $s = 1.8 \times 0.9$ より

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U_1^2 s} = 0.863, \quad C_D = C_L \tan 20^\circ = 0.314$$

ところで、 $p_1 = 13 \text{ kPa} = 13 \times 10^{-5} \text{ kbar} = 130 \text{ mbar}$ は、おおよそ高度 14,500m の大気に相当する。したがって、コンコルドと同じ速度で同高度をたたみ 1 畳の大きさの板が 20° の迎角をもって飛行すると、そこには $50.9 \text{ kN} = 5190 \text{ kgf}$ すなわち 60 kgf の人を 86 人ほど乗せて飛行できることに相当する。