

演習問題 6.1

式(4.5.6)に $\gamma = 1.4$, $M_1 = 4$ を代入すると,

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}} = \sqrt{0.189} = 0.435$$

式(4.6.3)より全圧比は

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \right\}^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left\{ \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right\}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.139$$

式(6.1.22)よりエントロピーの変化は

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = -\ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = 1.97$$

演習問題 6.2

(1) $\beta_1 = 20^\circ$ の衝撃波を過ぎる $M_1 = 4$ の流れの偏角 θ_1 は式(6.2.3)より

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left\{ 2 \cot \beta_1 \frac{M_1^2 \sin^2 \beta_1 - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta_1) + 2} \right\} = 7.44^\circ$$

M_2 は式(6.1.21)より

$$M_2 = \frac{1}{\sin(\beta_1 - \theta_1)} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2 \sin^2 \beta_1}{\gamma M_1^2 \sin^2 \beta_1 - \frac{\gamma-1}{2}}} = 3.47$$

総圧比 (全圧損失) $\frac{p_{02}}{p_{01}}$ は式(6.1.23)より

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 \sin^2 \beta_1 - 1) \right\}^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left\{ \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \beta_1}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \beta_1} \right\}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.966$$

また

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = -\ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0.0348$$

(2) (1)と同様にして, $\beta_2 = 30^\circ$ の衝撃波を過ぎる $M_2 = 3.47$ の流れについて求めると,

$$\theta_2 = 15.6^\circ, \quad M_3 = 2.55, \quad \frac{p_{03}}{p_{02}} = 0.842, \quad \frac{s_3 - s_2}{R} = 0.172$$

(3) 同様にして

$$\beta_3 = 50^\circ, \theta_3 = 25.3^\circ, M_4 = 1.40, \frac{p_{04}}{p_{03}} = 0.744, \frac{s_4 - s_3}{R} = 0.295$$

$$\beta_4 = 90^\circ, \theta_4 = 0^\circ, M_5 = 0.738, \frac{p_{05}}{p_{04}} = 0.957, \frac{s_5 - s_4}{R} = 0.0435$$

4-ショック・インテーク全体として,

$$\frac{p_{05}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \frac{p_{03}}{p_{02}} \frac{p_{04}}{p_{03}} \frac{p_{05}}{p_{04}} = 0.579, \quad \frac{s_5 - s_1}{R} = 0.545$$

となる. したがって, 演習問題 6.1 の総圧比 0.139, エントロピー増加 1.97 に比べ損失は小さく, 超音速機のインテークとして優れている.

演習問題 6.3

式(6.2.3)より

$$\begin{aligned} \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \tan \theta &= \lim_{M_1 \rightarrow \infty} 2 \cot \beta \frac{\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2}}{\gamma + \cos 2\beta + \frac{2}{M_1^2}} \\ &= 2 \cot \beta \frac{\sin^2 \beta}{\gamma + \cos 2\beta} \\ &= \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\gamma + \cos 2\beta} \\ &= \frac{\sin 2\beta}{\gamma + \cos 2\beta} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

θ および上式右辺は常に正, したがって θ_{\max} は右辺が最大となる β により与えられる.

$$f(\beta) \equiv \frac{\sin 2\beta}{\gamma + \cos 2\beta}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= \frac{2 \cos 2\beta(\gamma + \cos 2\beta) + 2 \sin^2 2\beta}{(\gamma + \cos 2\beta)^2} \\ &= \frac{2 + 2\gamma \cos 2\beta}{(\gamma + \cos 2\beta)^2} = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\cos 2\beta = -\frac{1}{\gamma} = -\frac{5}{7}$$

のとき, 極値(この場合, $f'(\beta)$ の変化から極大値)となる. またこのとき

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

これを式①に代入すると

$$\theta_{\max} = \tan^{-1} \frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{7-5}{5-7}} = \tan^{-1} \frac{10\sqrt{6}}{24} = 45.58^\circ$$

演習問題 6.4

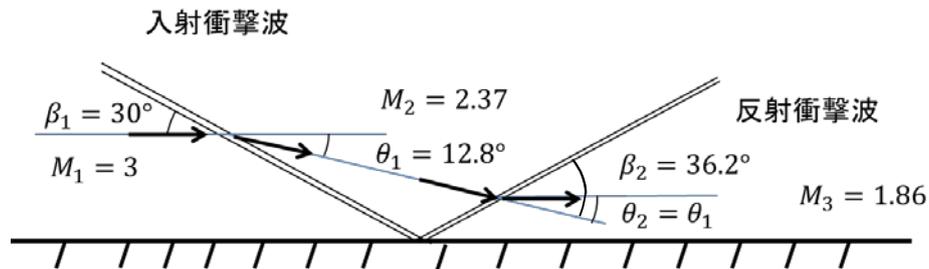
式(6.2.3)または図 6.2.1 から流れの偏角 θ は,

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right\} = 12.8^\circ$$

また, この斜め衝撃波の後方における流れのマッハ数 M_2 は式(6.1.21)より

$$M_2 = \frac{1}{\sin(\beta - \theta)} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta}{\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{2}}} = 2.367$$

$M_2 = 2.367$ の流れを偏角 $\theta = 12.78^\circ$ で偏向して平板に沿う流れにする反射衝撃波 β_2 が図 6.2.1 から存在することが分かる. したがって, これは壁面による衝撃波の正常反射であり, 式(6.2.3)より $\beta_2 = 36.2^\circ$, 式(6.1.21)より $M_3 = 1.86$ となり, 下図のような流れとなる.



演習問題 6.5

図 1 の領域 1, 2, 3 について, 演習問題 6.4 の結果が利用できる. したがって, M_4 の流れは $M_3 = 1.86$ の流れが垂直衝撃波を通過したものであり, 式(4.5.6) (式(6.1.21)で $\beta = 90^\circ$, $\theta = 0^\circ$ と同じ) から,

$$M_4 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}{\gamma M_3^2 - \frac{\gamma-1}{2}}} = 0.604$$

次に総圧比について，演習問題 6.2 と同様にして

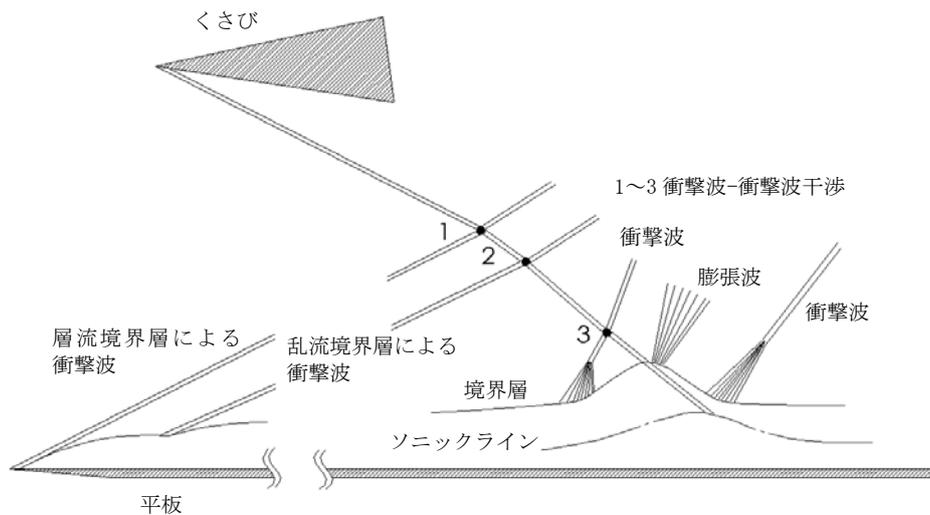
$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = 0.930, \quad \frac{p_{03}}{p_{02}} = 0.959, \quad \frac{p_{04}}{p_{03}} = 0.786$$

したがって，総圧比は

$$\frac{p_{04}}{p_{01}} = 0.701$$

演習問題 6.6

一例を下図に示す。



平板前縁から発達する層流境界層により流れの圧縮が生じて衝撃波が発生する。また，層流から乱流に遷移し境界層がさらに厚く発達することにより第 2 の衝撃波が発生する。そこに左斜め上から斜め衝撃波が入射すると，先の 2 つの境界層による衝撃波と衝撃波－衝撃波干渉を起こす (点 1, 2)。

次に，この斜め衝撃波が乱流境界層に入射すると，その後方で圧力上昇するためソニックライン下方の亜音速領域ではこの圧力上昇が上流へも伝播し，さらに境界層を厚くする。この境界層厚さの増加に伴い圧縮波が発生し，それが集合して第 3 の衝撃波が発生する。これはまた入射衝撃波と衝撃波－衝撃波干渉する (点 3)。

なお、入射衝撃波が境界層に入射した後方では、境界層の再付着に伴う厚さの減少により第4の圧縮が生じ衝撃波が発生する。入射衝撃波が反射したように見えるため、これを反射衝撃波と記載する解説書もある。またこの境界層厚さの減少によって境界層の凸部が形成されるためその頂上付近から図のように膨張波が発生する。入射衝撃波はソニックラインの下方では亜音速となるため消滅する。