演習問題　4.1

式(4.3.1)と式(4.3.2)より得られる式を式①とする．すなわち

$$\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{p_2}{\rho_1}-\frac{p_1}{\rho_2}=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right) \qquad \cdots ①$$

式①×$\frac{\rho_2}{p_1}$ すると

$$\frac{p_2}{p_1}-\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_2}{\rho_1}-1=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_2}{p_1}-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

ここで，$\frac{p_2}{p_1}=a$，$\frac{\rho_2}{\rho_1}=b$，$\frac{\gamma+1}{\gamma-1}=c$ とおくと

$$\begin{aligned}a-b+ab-1&=\frac{2\gamma}{\gamma-1}(a-b)\\&=\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{\gamma-1}{\gamma-1}\right)(a-b)\\&=(c+1)(a-b)\end{aligned}$$

よって

$$ab-1=c(a-b)$$
$$(a+c)(b-c)=1-c^2$$

a，b，c を元に戻すと

$$\begin{aligned}\left(\frac{p_2}{p_1}+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)&=1-\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2\\&=\frac{-4\gamma}{(\gamma-1)^2}\end{aligned} \qquad \cdots (4.3.3)$$

次に，式(4.3.3)より

$$\begin{aligned}\frac{\rho_2}{\rho_1}&=\frac{\dfrac{-4\gamma}{(\gamma-1)^2}}{\dfrac{p_2}{p_1}+\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}}+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\\&=\frac{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{p_2}{p_1}+\left(\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2-\dfrac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}}{\dfrac{p_2}{p_1}+\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}}\\&=\frac{\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{p_2}{p_1}+1}{\dfrac{p_2}{p_1}-\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}}\end{aligned} \qquad \cdots (4.3.5)$$

演習問題　4.2

$M_1 \cong 1$ より $M_1^2 - 1 \equiv \varepsilon(\ll 1)$ とおいて，式(4.4.2)を変形すると

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left\{1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)\right\} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ln\left\{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left\{1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\epsilon\right\} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ln\left\{\frac{2 + (\gamma - 1)(1 + \epsilon)}{\gamma + 1}\frac{1}{1 + \epsilon}\right\}$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left\{1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\epsilon\right\} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ln\left\{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\epsilon\right\} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ln(1 + \epsilon)$$

$f(x) = \ln(1 + x)$ のマクローリン展開した式 $(x = 0)$ を用いると

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}\left\{\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\epsilon - \frac{1}{2}\frac{4\gamma^2}{(\gamma + 1)^2}\epsilon^2 + \frac{1}{3}\frac{8\gamma^3}{(\gamma + 1)^3}\epsilon^3 + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left\{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\epsilon - \frac{1}{2}\frac{(\gamma - 1)^2}{(\gamma + 1)^2}\epsilon^2 + \frac{1}{3}\frac{(\gamma - 1)^3}{(\gamma + 1)^3}\epsilon^3 + \cdots\right\}$$

$$- \frac{\gamma}{\gamma - 1}\{\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{3}\epsilon^3 + \cdots\}$$

$$= \frac{\epsilon}{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}\{2\gamma + \gamma(\gamma - 1) - \gamma(\gamma + 1)\}$$

$$+ \frac{\epsilon^2}{2(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2}\{-4\gamma^2 - \gamma(\gamma - 1)^2 + \gamma(\gamma + 1)^2\}$$

$$+ \frac{\epsilon^3}{3(\gamma - 1)(\gamma + 1)^3}\{8\gamma^3 + \gamma(\gamma - 1)^3 - \gamma(\gamma + 1)^3\} + \cdots$$

$$= \frac{2\gamma^3 - 2\gamma}{3(\gamma - 1)(\gamma + 1)^3}\epsilon^3 + \cdots$$

$$= \frac{2\gamma}{3(\gamma + 1)^2}(M^2 - 1)^3 + \cdots \qquad \cdots (4.4.3)$$

演習問題　4.3

式(3.9.6)から

$$\frac{T_0}{T} = \frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2$$

$M = 1$ のとき $a = a_*$ より，上式は

$$\frac{a_0^2}{a_*^2} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
M_*^2 &= \frac{u^2}{a_*^2} = \frac{u^2}{a^2}\frac{a^2}{a_0^2}\frac{a_0^2}{a_*^2} \\
&= M^2 \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{\gamma+1}{2} \\
&= \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2}
\end{aligned}
\qquad \cdots (4.5.4)
$$

演習問題　4.4

式(4.3.5)を用いて，式(4.4.1)の密度比を圧力比で表すと，

$$
S_2 - S_1 = c_p \ln\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left\{\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{p_2}{p_1}}{1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_2}{p_1}}\right\}\right]
$$

ここで，$\frac{p_2}{p_1} = x$，　$\frac{1}{\gamma} = a$，　$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = b$　とおくと，上式の ln の中の項は $x^a\frac{b+x}{1+bx}$ となる．そこで，分子 − 分母 $\equiv f(x) = x^a(x+b) - (bx+1)$ の関数の変化について調べる．ただし，a，b はいずれも定数であり，$0 < x$，$0 < \left(\frac{3}{5} \leq\right) a \left(\leq \frac{3}{4}\right) < 1$，$1 < (4 \leq) b (\leq 7)$ を仮定する．a の範囲は，考えている気体によって決まる．自由度 f が並進 3 自由度だけの単原子気体から並進 3 自由度と回転 3 自由度を持つ多原子分子までを考えると，

$$
\gamma = \frac{f+2}{f} \qquad \text{よって}\quad \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \leq \gamma \leq \frac{5}{3}
$$

$$
b = \frac{\frac{f+2}{f}+1}{\frac{f+2}{f}-1} = \frac{2f+2}{2} = f+1
$$

となる．関数 $f(x)$ の $x = 1$ における様子を調べてみると，

(i)　$f(1) = 1 + b - (b+1) = 0$

(ii)　$f'(x) = ax^{a-1}(x+b) + x^a - b$　　　$\therefore\ f'(1) = a + 1 + ab - b$

ここで $a = \frac{1}{\gamma}$，$b = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ を代入すると

$$
f'(1) = \frac{1}{\gamma} + 1 + \frac{\gamma+1}{\gamma(\gamma-1)} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{\gamma - 1 + \gamma^2 - \gamma + \gamma + 1 - \gamma^2 - \gamma}{\gamma(\gamma-1)} = 0
$$

これより，関数 $f(x)$ は $x = 1$ で極値あるいは重根をとることがわかる．

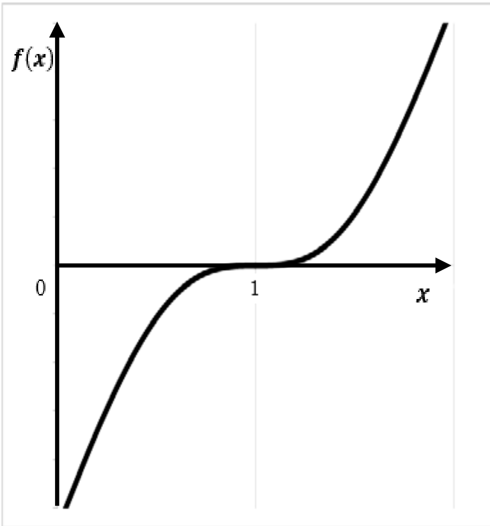
(iii)　$f''(x) = a^2x^{a-1} + a(a-1)bx^{a-2} + ax^{a-1} = ax^{a-2}\{(a+1)x + b(a-1)\}$

ここで $ax^{a-2} > 0$ に注意すると，$f''(x) < 0$となるのは

$$x < \frac{1-a}{a+1}b = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma}}{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 1$$

これより $x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ となり上に凸．$x > 1$ のとき$f''(x) > 0$ となり下に凸.

(i)～(iii)より，$x = \frac{p_2}{p_1} > 1$ で ln の中は 1 以上になり $\Delta S \geq 0$．一方，$\frac{p_2}{p_1} < 1$ では $\Delta S < 0$ の領域が存在することになるが，これは非物理的な解である膨張衝撃波を意味する.



演習解答　4.5

$J \equiv$ 式(4.5.5)の分母 $-$ 式(4.5.5)の分子 を考える．

$$J = \gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2} - \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right\}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2}M_1^2 - \frac{\gamma+1}{2}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2}(M_1^2 - 1)$$

よって $M_1 > 1$ のとき，式(4.5.5)の分母 $>$ 式(4.5.5)の分子 となる．分母，分子はいずれも正であることから，$M_1 > 1$ のとき $M_2 < 1$.

演習問題　4.6

式(4.6.1)より

$$\ln\frac{p_{02}}{p_{01}} = -\frac{s_{02}-s_{01}}{R} = -\frac{s_2-s_1}{R}$$

式(4.4.2)より

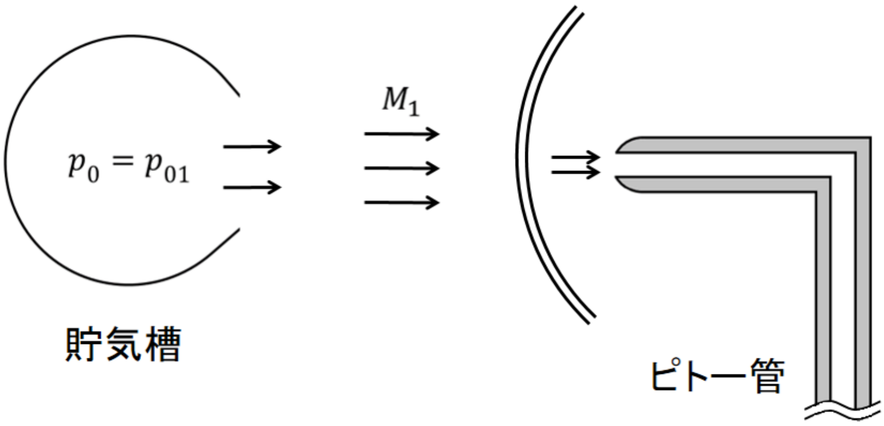
$$-\frac{s_2-s_1}{R} = -\frac{1}{\gamma-1}\ln\left\{1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left({M_1}^2-1\right)\right\} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left\{\frac{2+(\gamma-1){M_1}^2}{(\gamma+1){M_1}^2}\right\}$$

両式より

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left\{1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left({M_1}^2-1\right)\right\}^{-\frac{1}{\gamma-1}}\left\{\frac{2+(\gamma-1){M_1}^2}{(\gamma+1){M_1}^2}\right\}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad \cdots(4.6.3)$$

演習問題　4.7

超音速流中にピトー管を挿入すると，その前方には図のような弓型衝撃波が発生する(図4.1.1(b))．このためピトー管で計測される圧力(総圧)はこの垂直衝撃波後方の p_{02} となる．



したがって，垂直衝撃波前後の総圧の比とマッハ数の関係は式(4.6.3)から M_1 (超音速流のマッハ数)を求める．なお，超音速流の静圧 p_1 が既知であっても次式から M_1 を求めることができる．

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_{01}}\cdot\frac{p_{01}}{p_1}$$

式(3.9.4)，式(4.6.3)を上式の右辺に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{p_{02}}{p_1} &= \left\{1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left({M_1}^2-1\right)\right\}^{-\frac{1}{\gamma-1}}\left\{\frac{2+(\gamma-1){M_1}^2}{(\gamma+1){M_1}^2}\right\}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&= \left\{\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}\left\{\frac{2+(\gamma-1){M_1}^2}{(\gamma+1){M_1}^2}\right\}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left\{\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2}\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&= \left\{\frac{\gamma+1}{2\gamma {M_1}^2-(\gamma-1)}\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}\left\{\frac{(\gamma+1){M_1}^2}{2}\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}
\end{aligned}
$$

左辺が既知であることから M_1 について解けばよい．これをレーリーのピトー管式と呼ぶ．

演習問題　4.8

よどみ点温度(総温)は衝撃波前後で変化しないから，式(3.9.6)より

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$$

気流温度を $T = 288\ \mathrm{K}$ (t = 15℃) として，γ = 1.4，$M = 10$，$T = 288\ \mathrm{K}$ を代入すると

$$T_0 = 6{,}048\ \mathrm{K}$$

を得る．なお実際の実在気体においては，気体分子の解離など吸熱反応が生じるため，これよりかなり低い温度になる．