演習問題　8.1

まず，管の断面積とマッハ数の関係を求める．

$$u = aM = \sqrt{\gamma RT}M \qquad \cdots①$$

よって

$$du = \sqrt{\gamma R}M \cdot \frac{dT}{2\sqrt{T}} + \sqrt{\gamma RT}dM \qquad \cdots②$$

両式より

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T} + \frac{dM}{M}$$

これを式(8.2.1)に代入して

$$\frac{1}{2}\frac{dT}{T} + \frac{dM}{M} = \frac{1}{M^2 - 1}\frac{dA}{A} \qquad \cdots③$$

式(3.9.6)

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2$$

と，その微分

$$-\frac{T_0}{T^2}dT = (\gamma - 1)MdM \qquad \cdots④$$

より

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}\frac{dM}{M} \qquad \cdots⑤$$

式⑤を式③に代入し

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}\cdot\frac{dM}{M} + \frac{dM}{M} = \frac{1}{M^2 - 1}\frac{dA}{A}$$

$$\left(1 - \frac{\frac{\gamma - 1}{2}M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}\right)\cdot\frac{dM}{M} = \frac{1}{M^2 - 1}\frac{dA}{A}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}\ \frac{dM}{M} = \frac{1}{M^2 - 1}\frac{dA}{A}$$

$$\therefore\quad \frac{dM}{M} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}{M^2 - 1}\cdot\frac{dA}{A} \qquad \cdots⑥$$

したがって

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}\ \frac{dM}{M}$$

ここで $M^2 - 1 = x$ とおくと

$$2MdM = dx \qquad \therefore \quad dM = \frac{1}{2M}dx$$

よって

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{\frac{\gamma - 1}{2}(M^2 - 1) + \frac{\gamma - 1}{2} + 1}\frac{1}{2M^2}dx = \frac{x}{\frac{\gamma - 1}{2}x + \frac{\gamma + 1}{2}}\frac{1}{2(x + 1)}dx$$

両辺積分して

$$\int \frac{dA}{A} = \int \frac{x}{(\gamma - 1)x + (\gamma + 1)}\frac{1}{x + 1}dx$$

$$\log A = \frac{1}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)}\left[\left\{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\log|(\gamma - 1)x - (\gamma + 1)| - \log|x + 1|\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\log\{(\gamma - 1)(M^2 - 1) + (\gamma + 1)\} - \log M^2\right]$$

$$= \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}\log\{(\gamma - 1)M^2 + 2\} - \frac{1}{2}\log M^2$$

$$= \log\left[\frac{1}{M}\cdot\left\{2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\right]$$

状態 1 から状態 2 まで積分すると

$$\log\frac{A_2}{A_1} = \log\left[\frac{M_1}{M_2}\cdot\left\{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}{M_2}^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}{M_1}^2}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2}\left[\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}{M_2}^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}{M_1}^2}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \qquad \cdots ⑦$$

式⑦において添字 1 を音速状態$*$とおくと，$A_1 = A_*$，$M_1 = 1$．　また，$A_2 = A$，$M_2 = M$ とおいて

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M}\left\{\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \qquad \cdots (8.3.1)$$

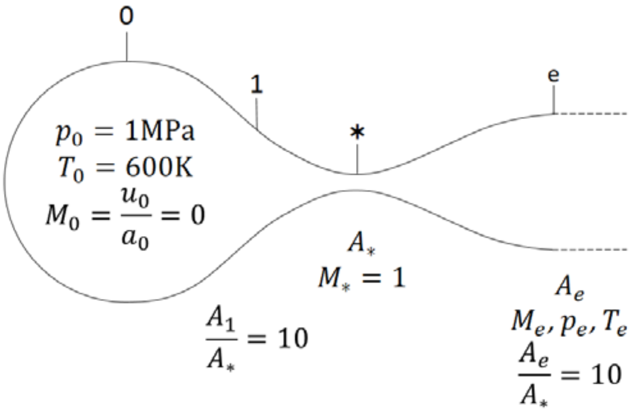
演習問題　8.2

等エントロピー変化であるから式(3.9.2)がそのまま利用できる．添字 1 を$*$とする．よって $M_1 = M_* = 1$，添字 2 をとって次式となる．

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$= \left(\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad \cdots (8.3.2)$$

演習問題　8.3



式(8.3.1)より

$$\frac{1}{M} \left\{ \frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right\}^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = 10$$

これをMについて解くと(収束計算すると)

$$M = 3.92, \quad 0.0580$$

したがって

$$M_{\mathrm{e}} = 3.92, \quad M_1 = 0.0580$$

式(3.9.4)と式(3.9.6)で，添字なしを e と 1 において

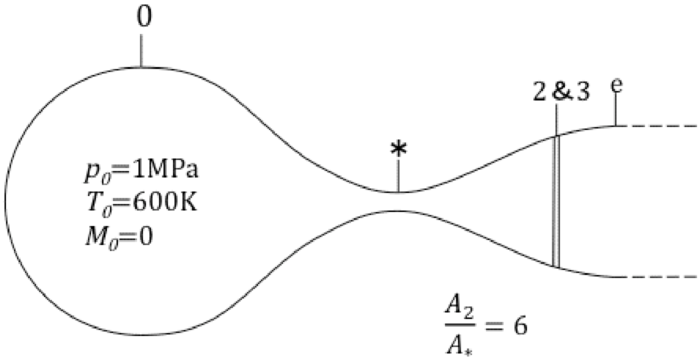
$$p_e = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_e}^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 7.30 \ \mathrm{kPa}$$

$$p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_1}^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 997.7 \ \mathrm{kPa} \Rightarrow 998 \ \mathrm{kPa}$$

$$T_e = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_e}^2 \right)^{-1} = 147.1 \ \mathrm{K} \Rightarrow 147 \ \mathrm{K}$$

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_1}^2 \right)^{-1} = 599.6 \ \mathrm{K} \Rightarrow 600 \ \mathrm{K}$$

演習問題　8.4



添字 2 の位置（$\frac{A_2}{A_*}=6$ で垂直衝撃波直前）までは等エントロピー変化するので，式(8.3.1)より

$$\frac{1}{M_2}\left\{\frac{2+(\gamma-1){M_2}^2}{\gamma+1}\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=6$$

これを $M_2>1$ について解くと(収束計算すると)

$$M_2=3.368 \Rightarrow 3.37$$

この垂直衝撃波直後の流れのマッハ数 M_3 は式(4.5.6)より

$$M_3=\sqrt{\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}{M_2}^2}{\gamma{M_2}^2-\frac{\gamma-1}{2}}}=0.3678 \quad \Rightarrow 0.368$$

となる．ここで演習問題 8.1 の解答における式⑦(次式)

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{M_1}{M_2}\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}{M_2}^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}{M_1}^2}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

において，添字 1 → 3，2 → e とおくと

$$\frac{M_3}{M_e}\left[\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}{M_e}^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}{M_3}^2}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=\frac{A_e}{A_3}=\frac{10}{6}$$

$M_3=0.368$であり，M_eについて解くと(収束計算すると)

$$M_e=0.2092 \Rightarrow \ M_e=0.209$$

次にノズル出口部での静圧 p_e を求める．図中の位置 0 と位置 2 の間は等エントロピー変化するので式(3.9.4)から

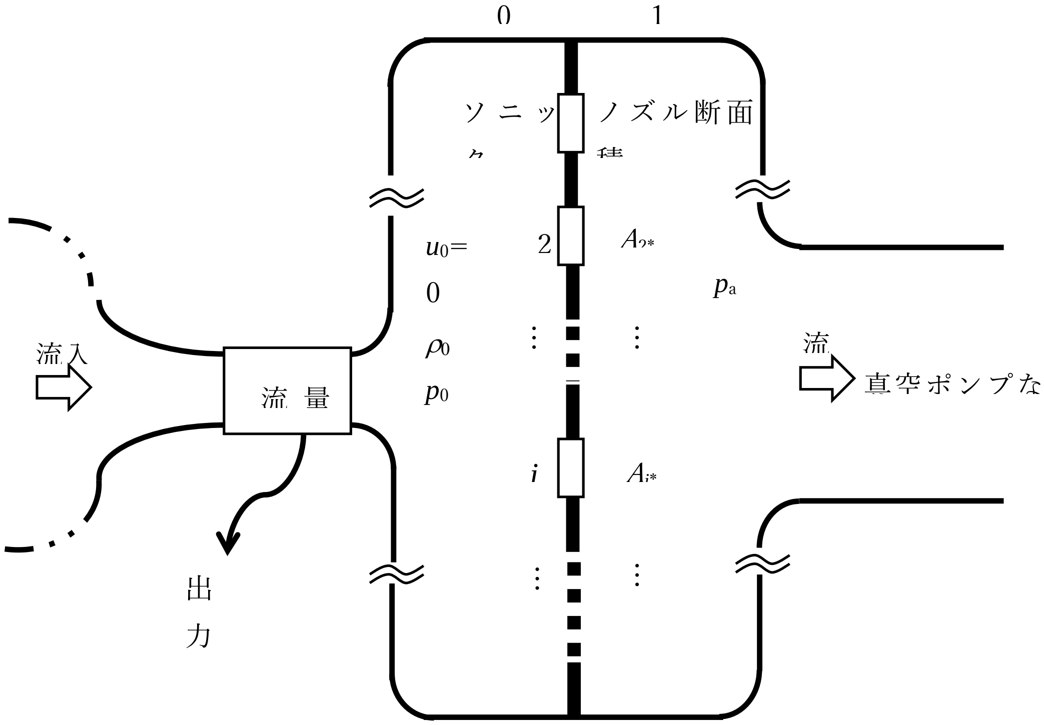
$$p_2 = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_2}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 15.84\ \ \text{kPa}$$

p_3 は垂直衝撃波前後の関係式(4.3.8)より

$$p_3 = p_2 \left\{1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\left({M_2}^2 - 1\right)\right\} = 207.0\ \ \text{kPa}$$

よって p_e は式(3.9.1)から

$$p_e = p_3 \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_3}^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_e}^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 220.48\ \ \text{kPa}\ \ \Rightarrow 220.5\ \ \text{kPa}$$



演習問題　8.5

流量計の使用環境に合わせて，例えば上図のような構成とする．貯気槽 0 とソニックノズル群をはさんで区切られた下流側 1 の間の圧力差 $(p_0 - p_a)$ を，ソニックノズル部でマッハ数が 1 になるように設定する．これにより i 番目のソニックノズルを通過する流体の質量流量は，単位時間あたり

$$\dot{m}_i = \rho_{i*} u_{i*} A_{i*} = \frac{p_{i*}}{RT_{i*}} a_{i*} A_{i*} = \frac{p_{i*}}{RT_{i*}} \sqrt{\gamma R T_{i*}} A_{i*} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p_{i*}}{\sqrt{T_{i*}}} A_{i*}$$

となる．通常，密度は圧力と温度から求めることが多く，さらに式(3.9.4)と式(3.9.6)を用いると，添字なしを*，したがって $M=1$ とおくと次式を得る．

$$\dot{m_\iota}=\sqrt{\frac{\gamma}{R}}p_0(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\frac{1}{T_0})^{\frac{1}{2}}(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\frac{1}{2}}\cdot A_{i*}$$

$$=p_o\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}(\frac{\gamma+1}{2})^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}}\cdot A_{i*}$$

$$=p_o\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}(\frac{\gamma+1}{2})^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\cdot A_{i*}$$

質量流量をいくつかのソニックノズルの組み合わせにより種々設定し，そのときの流量計の出力を求めて検定を行う．これはノズルスロート部で流れをチョークさせると，質量流量が変化しなくなる現象を利用したものである．

演習問題　8.6

図 8.4.1 の膨張波の変化から，最初に高圧室へ向かう波は Q 波として伝播し管端で反射した後，領域④および領域③を P 波として右向きに進行する．したがって $p_4=p_3$ で $u_4=0$より，式(5.3.7)を用いて次式を得る．

$$\frac{2a_4}{\gamma_4-1}=u_3+\frac{2a_3}{\gamma_3-1}$$

ここで $\gamma_4=\gamma_3$ より上式から

$$a_3=a_4-\frac{\gamma_4-1}{2}u_3 \qquad (\text{なお } u_3=u_2) \qquad \cdots(8.4.8)$$

一方，式(4.3.9)を使い垂直衝撃波前後の気流速度を，$u_1(=U_{s1})$，$u_2(=U_{s1}-u_2)$，$U_{s1}/a_1=M_{s1}$ とし整理すると

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{u_{s1}}{u_{s1}-u_2}=\frac{(\gamma_1+1)M_{s1}^2}{2+(\gamma_1-1)M_{s1}^2}$$

$$u_2=\left\{1-\frac{2+(\gamma_1-1)M_{s1}^2}{(\gamma_1+1)M_{s1}^2}\right\}U_{s1}=\frac{2a_1}{\gamma_1+1}\left(M_{s1}-\frac{1}{M_{s1}}\right) \qquad \cdots(8.4.9)$$

これを式(8.4.8)の $u_3(=u_2)$ に代入し整理すると

$$\frac{a_4}{a_3}=1+\ \frac{\gamma_4-1}{\gamma_1+1}\ \frac{a_1}{a_3}\left(M_{s1}-\frac{1}{M_{s1}}\right)$$

$$=1+\ \frac{\gamma_4-1}{\gamma_1+1}\ \frac{a_1}{a_4}\ \frac{a_4}{a_3}\left(M_{s1}-\frac{1}{M_{s1}}\right)$$

これを a_4/a_3 について解くにあたって

$$c = \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\ \frac{a_1}{a_4}\left(M_{s1} - \frac{1}{M_{s1}}\right)$$

とおくと

$$x = 1 + cx$$

$$\therefore \quad x = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{1-c}$$

$$= \frac{1}{1 - \ \dfrac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\ \dfrac{a_1}{a_4}\left(M_{s1} - \dfrac{1}{M_{s1}}\right)} \qquad \cdots (8.4.10)$$

式(8.4.11)の導出を述べておく．式(8.4.7)および式(8.4.10)式を式(8.4.3)に代入すると

$$\frac{p_4}{p_1}\left[1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1}(M_{s1}^2 - 1)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{1 - \ \dfrac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\ \dfrac{a_1}{a_4}\left(M_{s1} - \dfrac{1}{M_{s1}}\right)}\right]^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$$

$$\therefore \quad \frac{p_4}{p_1} = \left[1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1}(M_{s1}^2 - 1)\right]\left[\frac{1}{1 - \ \dfrac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1}\dfrac{a_1}{a_4}\left(M_{s1} - \dfrac{1}{M_{s1}}\right)}\right]^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} \qquad \cdots (8.4.11)$$