演習問題　3.1

式(3.8.2)を式(2.4.8)に代入して e を消去し，さらに式(2.4.2)を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H - p) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u H) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v H) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w H)$$

$$= \rho\frac{\partial H}{\partial t} + H\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho u\frac{\partial H}{\partial x} + \rho v\frac{\partial H}{\partial y} + \rho w\frac{\partial H}{\partial z} + H\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)$$

$$= \rho\left(\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} + w\frac{\partial H}{\partial z}\right) + H\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$= \rho\left(\frac{DH}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0$$

演習問題　3.2

式(3.8.2)に式(3.3.7)を代入して ϵ を消去すると

$$H = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

$$= \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

$$= \frac{a^2}{\gamma - 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)$$

演習問題　3.3

式(3.7.5)を用いて式(3.8.7)から密度を消去すると

$$p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right) = p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_2^2\right)$$

これより

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_2^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

演習問題　3.4

(1) $M_\infty = 0.7$ のとき，表より $p_0/p_\infty = 1.387$ であるから

$$p_\infty = \frac{5}{1.387} = 3.6049 \cdots \text{気圧}$$

を得る. 有効桁数 3 桁で整理すると, テスト部の気流圧力は 3.60 気圧となる. なお, 式(3.9.4)を用いると

$$p_\infty = \frac{p_0}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \frac{5}{(1+0.2\times 0.7^2)^{3.5}} = 3.6046\cdots \cong 3.60 \ \text{気圧}$$

を得る.

(2) $M_\infty = 1.0$ のとき，表より $T_0/T_\infty = 1.2$ であるから

$$T_\infty = \frac{300}{1.2} = 250 \ \text{K}$$

を得る．したがって，テスト部の気流温度は 250 K となる．なお，式(3.9.6)を用いると

$$T = \frac{T_0}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2} = \frac{300}{1+0.2\times 1.0^2} = 250 \ \text{K}$$

を得る.

(3) 等エントロピー気流では総圧が一定なので

$$\frac{p_*}{p_\infty} = \frac{\frac{p_0}{p_\infty}}{\frac{p_0}{p_*}}$$

表より$p_0/p_\infty = 1.387$，$p_0/p_* = 1.893$ であるから

$$\frac{p_*}{p_\infty} = \frac{1.387}{1.893} = 0.732699\cdots$$

式(3P.1)に代入して有効桁数 3 桁で整理すると

$$\mathrm{C_p^*} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{p_*}{p_\infty}-1\right) = \frac{2}{1.4\times 0.7^2}\left(\frac{1.387}{1.893}-1\right) = -0.7793\cdots \cong -0.779$$

を得る．なお，式(3.9.1)を用いると圧力比は

$$\frac{p_*}{p_\infty} = \left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_*^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{1+0.2\times 0.7^2}{1+0.2\times 1^2}\right)^{3.5} = 0.73278\cdots$$

となる.

演習問題　3.5

式(3.9.6)を用いる．T_∞ が 200 K であることから，前方よどみ点における気流温度は

$$T_0 = T_\infty\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right) = 200\times(1+0.2\times24^2) = 23{,}240\ \ \mathrm{K}$$

となる．

演習問題　3.6

式(3.7.5)の右辺の定数を s (エントロピー)とおくと

$$\nabla p = s\gamma\rho^{\gamma-1}\nabla\rho = \frac{p}{\rho^\gamma}\gamma\rho^{\gamma-1}\nabla\rho = \frac{\gamma p}{\rho}\nabla\rho = a^2\nabla\rho$$

a^2 の勾配は

$$\nabla a^2 = \frac{\gamma}{\rho}\nabla p - \frac{\gamma p}{\rho^2}\nabla\rho$$

両式より $\nabla\rho$ を消去すると

$$\nabla a^2 = \frac{\gamma}{\rho}\nabla p - \frac{\gamma p}{\rho^2}\frac{\nabla p}{a^2} = \frac{\gamma-1}{\rho}\nabla p$$

これより

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\left(\frac{a^2}{\gamma-1}\right) \qquad \cdots①$$

式①を式(3.11.1)に代入すると

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{u}\cdot\vec{u}) - \vec{u}\times\mathrm{rot}\vec{u} + \frac{\nabla a^2}{\gamma-1} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\times\mathrm{rot}\vec{u} + \nabla\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}\right) = 0$$

式(3.8.5)を用いると，定常等エントロピー流れ場に対して

$$-\vec{u}\times\mathrm{rot}\vec{u} + \nabla H = 0$$

上式と流速ベクトル $\vec{u}$ との内積をとると

$$\vec{u}\cdot(-\vec{u}\times\mathrm{rot}\vec{u} + \nabla H) = u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} + w\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \qquad \cdots②$$

これは，定常流れ場に対する式(3.8.3)に一致し，流線に沿って全エンタルピー H が一定であることを意味する．一方，外力を無視した定常等エントロピー流れ場に対するベルヌーイの定理に式①を用いると

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} = \frac{u^2+v^2+w^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = H = \mathrm{const.}$$

と書くことができる．ベルヌーイの定理はもともと流線に沿って成り立つ式であるから，定常等エントロピー流れ場に対するベルヌーイの式は，流線に沿って

$$H = \mathrm{const.}$$

を意味する．これは，定常等エントロピー流れ場では流線に沿って全エンタルピーが一定になることを意味する式(3.8.3)あるいは式②と一致する．(注意：式(3.8.3)は等エントロピー流れ場を仮定していない．)