

演習問題 4.1

(4.3.3)式について,

$$\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_2} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

① 式 $\times \frac{\rho_2}{p_1}$ すると

$$\frac{p_2}{p_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{p_2 \rho_2}{p_1 \rho_1} - 1 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

ここで、 $\frac{p_2}{p_1} = a$, $\frac{\rho_2}{\rho_1} = b$, $\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = c$ とおくと、

$$\begin{aligned} a - b + ab - 1 &= \frac{2\gamma}{\gamma-1} (a - b) \\ &= \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\gamma-1} \right) (a - b) \\ &= (c + 1)(a - b) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} ab - 1 &= c(a - b) \\ (a + c)(b - c) &= 1 - c^2 \end{aligned}$$

a, b, c を元に戻すと、

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) &= 1 - \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^2 \\ &= \frac{-4\gamma}{(\gamma-1)^2} \quad \dots (4.3.3) \end{aligned}$$

次に、(4.3.3)式より

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{-4\gamma}{(\gamma-1)^2} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \\ &= \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} p_2 + \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^2 - \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \\ &= \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} p_2 + 1}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad \dots (4.3.5) \end{aligned}$$

演習問題 4.2

$M_1 \cong 1$ より $M_1^2 - 1 \equiv \varepsilon (\ll 1)$ とおいて, 式(4.4.2)を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{S_2 - S_1}{R} &= \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right\} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left\{ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \varepsilon \right\} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left\{ \frac{2 + (\gamma - 1)(1 + \varepsilon)}{\gamma + 1} \frac{1}{1 + \varepsilon} \right\} \\ &= \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \varepsilon \right\} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \varepsilon \right\} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln(1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

$f(x) = \ln(1 + x)$ のマクローリン展開した式 ($x = 0$) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{S_2 - S_1}{R} &= \frac{1}{\gamma - 1} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{4\gamma^2}{(\gamma + 1)^2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \frac{8\gamma^3}{(\gamma + 1)^3} \varepsilon^3 + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\{ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{(\gamma - 1)^2}{(\gamma + 1)^2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \frac{(\gamma - 1)^3}{(\gamma + 1)^3} \varepsilon^3 + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\{ \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 + \dots \right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{(\gamma - 1)(\gamma + 1)} \{2\gamma + \gamma(\gamma - 1) - \gamma(\gamma + 1)\} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2} \{-4\gamma^2 - \gamma(\gamma - 1)^2 + \gamma(\gamma + 1)^2\} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^3}{3(\gamma - 1)(\gamma + 1)^3} \{8\gamma^3 + \gamma(\gamma - 1)^3 - \gamma(\gamma + 1)^3\} + \dots \\ &= \frac{2\gamma^3 - 2\gamma}{3(\gamma - 1)(\gamma + 1)^3} \varepsilon^3 + \dots \\ &= \frac{2\gamma}{3(\gamma + 1)^2} (M^2 - 1)^3 + \dots \end{aligned} \quad \dots (4.4.3)$$

演習問題 4.3

式(3.9.6)から

$$\frac{T_0}{T} = \frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$M = 1$ のとき $a = a_*$ より, 上式は

$$\frac{a_0^2}{a_*^2} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}
M_*^2 &= \frac{u^2}{a_*^2} = \frac{u^2 a^2 a_0^2}{a^2 a_0^2 a_*^2} \\
&= M^2 \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{\gamma+1}{2} \\
&= \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2 + 2} \quad \dots (4.5.4)
\end{aligned}$$

演習問題 4.4

式(4.3.5)を用いて、式(4.4.1)の密度比を圧力比で表すと、

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}} \right\} \right]$$

ここで、 $\frac{p_2}{p_1} = x$, $\frac{1}{\gamma} = a$, $\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = b$ とおくと、上式の \ln の中の項は $x^a \frac{b+x}{1+bx}$ となる。そこで、分子-分母 $\equiv f(x) = x^a(x+b) - (bx+1)$ の関数の変化について調べる。ただし、 a , b はいずれも定数であり、 $0 < x$, $0 < \left(\frac{3}{5}\right) a \left(\leq \frac{3}{4}\right) < 1$, $1 < (4 \leq) b (\leq 7)$ を仮定する。 a の範囲は、考えている気体によって決まる。自由度 f が並進3自由度だけの単原子気体から並進3自由度と回転3自由度を持つ多原子分子までを考えると、

$$\gamma = \frac{f+2}{f} \quad \text{よって} \quad \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \leq \gamma \leq \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{\frac{f+2}{f} + 1}{\frac{f+2}{f} - 1} = \frac{2f+2}{2} = f+1$$

となる。関数 $f(x)$ の $x=1$ における様子を調べてみると、

(i) $f(1) = 1 + b - (b+1) = 0$

(ii) $f'(x) = ax^{a-1}(x+b) + x^a - b \quad \therefore f'(1) = a + 1 + ab - b$

ここで $a = \frac{1}{\gamma}$, $b = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$ を代入すると

$$f'(1) = \frac{1}{\gamma} + 1 + \frac{\gamma+1}{\gamma(\gamma-1)} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{\gamma-1 + \gamma^2 - \gamma + \gamma + 1 - \gamma^2 - \gamma}{\gamma(\gamma-1)} = 0$$

これより、関数 $f(x)$ は $x=1$ で極値あるいは重根をとることがわかる。

(iii) $f''(x) = a^2 x^{a-1} + a(a-1)bx^{a-2} + ax^{a-1} = ax^{a-2}\{(a+1)x + b(a-1)\}$

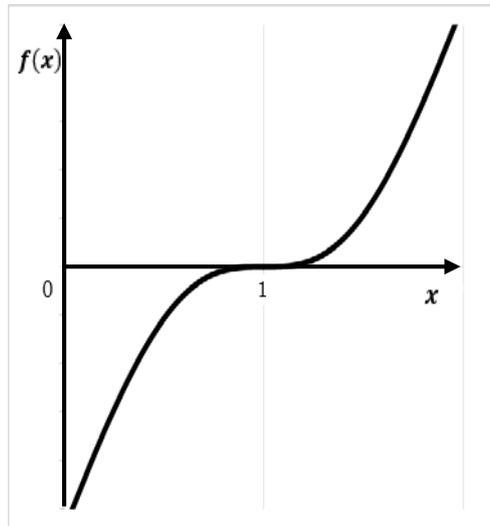
ここで $ax^{a-2} > 0$ に注意すると、 $f''(x) < 0$ となるのは

$$x < \frac{1-a}{a+1} b = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma}}{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 1$$

これより $x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ となり上に凸. $x > 1$ のとき $f''(x) > 0$ となり下に凸.

(i)~(iii)より, $x = \frac{p_2}{p_1} > 1$ で \ln の中は 1 以上になり $\Delta S \geq 0$. 一方, $\frac{p_2}{p_1} < 1$ では $\Delta S < 0$ の

領域が存在することになるが, これは非物理的な解である膨張衝撃波を意味する.



演習解答 4.5

$J \equiv$ 式(4.5.5)の分母 - 式(4.5.5)の分子 を考える.

$$\begin{aligned} J &= \gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2} - \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right\} \\ &= \frac{\gamma+1}{2} M_1^2 - \frac{\gamma+1}{2} \\ &= \frac{\gamma+1}{2} (M_1^2 - 1) \end{aligned}$$

よって $M_1 > 1$ のとき, 式(4.5.5)の分母 $>$ 式(4.5.5)の分子 となる. 分母, 分子はいずれも正であることから, $M_1 > 1$ のとき $M_2 < 1$.

演習問題 4.6

式(4.6.1)より

$$\ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = -\frac{s_{02} - s_{01}}{R} = -\frac{s_2 - s_1}{R}$$

式(4.4.2)より

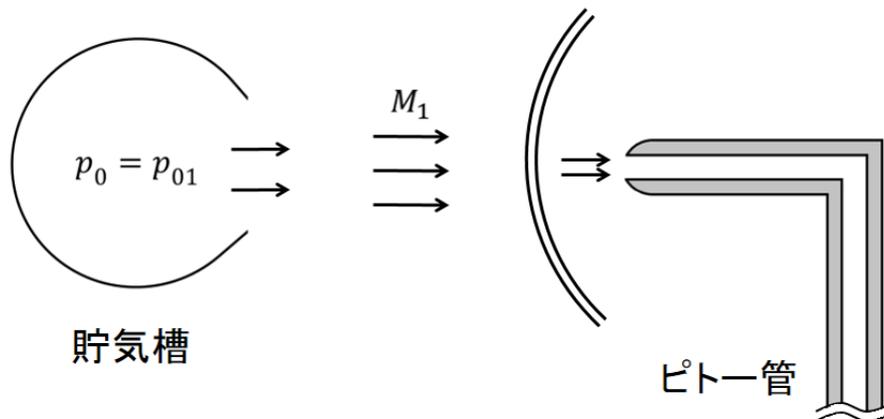
$$-\frac{s_2 - s_1}{R} = -\frac{1}{\gamma - 1} \ln \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right\} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left\{ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right\}$$

両式より

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right\}^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \left\{ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right\}^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \dots (4.6.3)$$

演習問題 4.7

超音速流中にピトー管を挿入すると、その前方には図のような弓型衝撃波が発生する(図4.1.1(b)). このためピトー管で計測される圧力(総圧)はこの垂直衝撃波後方の p_{02} となる.



したがって、垂直衝撃波前後の総圧の比とマッハ数の関係は式(4.6.3)から M_1 (超音速流のマッハ数)を求める。なお、超音速流の静圧 p_1 が既知であっても次式から M_1 を求めることができる。

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \cdot \frac{p_{01}}{p_1}$$

式(3.9.4)、式(4.6.3)を上式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{p_{02}}{p_1} &= \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \right\}^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left\{ \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right\}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&= \left\{ \frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right\}^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left\{ \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right\}^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left\{ \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
&= \left\{ \frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right\}^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left\{ \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}
\end{aligned}$$

左辺が既知であることから M_1 について解けばよい。これをレーリーのピトー管式と呼ぶ。

演習問題 4.8

よどみ点温度(総温)は衝撃波前後で変化しないから、式(3.9.6)より

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$$

気流温度を $T = 288 \text{ K}$ ($t = 15^\circ\text{C}$) とし、 $\gamma = 1.4$, $M = 10$, $T = 288 \text{ K}$ を代入すると

$$T_0 = 6,048 \text{ K}$$

を得る。なお実際の実在気体においては、気体分子の解離など吸熱反応が生じるため、これよりかなり低い温度になる。