

## 3B03 部分空間の判別分析を用いた状態推定に基づく翼周り流れの能動制御

○ 佐々木嶺, 佐藤慎太郎 (東北大), 中吉嗣, 半田莉音 (明治大), 大西直文 (東北大)

Active flow control over an airfoil based on state estimation using subspace discriminant analysis

Rei Sasaki, Shintaro Sato (Tohoku Univ.), Yoshitsugu Naka, Rion Handa (Meiji Univ.), and Naofumi Ohnishi (Tohoku Univ.)

Key Words : plasma actuator, proper orthogonal decomposition, subspace method

### Abstract

To realize feedback separation control, it is important to identify a low-dimensional space to represent the characteristics of the flow field by modal analysis. The subspace method is a method to treat the subspace spanned by the sets of extracted vector as representative of the dataset. In fluid mechanics, flow fields with different parameters are considered to be represented by different subspaces. In this study, a discriminant analysis is performed for the subspace spanned by the modes of the pressure field on the airfoil surface obtained from the experimental data. Measurements are carried out at different angles of attack of the airfoil, and the subspaces of each data is obtained. The proposed method provides an index that discriminates those subspaces whether the flow is separated or attached. Furthermore, it is demonstrated that the subspaces of the unforced flow and the flow forced by plasma actuator can be correctly discriminated.

### 1. 緒言

流れの剥離は航空機などの空力抵抗を増加させる要因であり、省エネルギー化の観点からその制御は重要な課題である。剥離制御を実現するデバイスとしては、流体に対して運動量を与えて制御を行う能動制御デバイスが考えられている。特に誘電体バリア放電プラズマアクチュエータ (Dielectric Barrier Discharge Plasma Actuator: DBD-PA) は、電気的な制御により応答性の高い流体制御を実現できると考えられており、近年注目を集めている能動制御デバイスである [1]。能動制御デバイスを最大限に効率良く使用方法としては、センサを用いて時々刻々の流れの状態をフィードバックし、状況に応じて流体制御を行う方法が研究されている [2]。

流体のフィードバック制御の実現のためには、センサで取得した計測データに基づいてリアルタイムに流れ場の状態を推定するシステムの構築が必要である。これまでにさまざまな制御モデルが研究されているが、複雑に変化する流れ場のモデル化の精度と計算コストにはトレードオフの関係がある [3]。例えば、直接数値シミュレーションを行えば高い精度で流れ場を推測できるが、リアルタイムで流れ場の状態を推定することは困難である。一方で、センサで得た特定の物理量をそのままアクチュエータ出力のパラメータとして用いる方法では、流れ場の変化に対応した高速な制御が可能であると考えられている。近年では、深層強化学習によってアクチュエータ出力とその結果に基づく報酬を最大化するシステムの構築によって、リアルタイム性を保ちながら複雑な流れ場の変化に対応できる制御モデルの研究がなされている [4]。また、より流体

力学的な現象に基づいた制御方法として、低次元モデルを用いる方法が考えられている [5, 6]。低次元モデル化には、流れ場の主要な構造のみに着目することで計算コストを低減しながら流れ場の特徴を捉えられるという利点がある。代表的な低次元モデルには、固有直交分解 (Proper Orthogonal Decomposition: POD) [7] を用いたものがあり、多くの分野で応用されている。

データセットの主要な成分から元のデータの構造を推察する方法は、流体力学に限らず多くの研究がされてきた。画像認識の分野では、主成分分析 (POD と数学的に同義) によって抽出された固有ベクトルが張る部分空間に着目した画像の判別が盛んに研究されている。これは部分空間法と呼ばれ、部分空間を 1 つの点とみなすグラスマン多様体と、その多様体上の距離の導入によってさまざまな手法へと拡張されている。部分空間法には、主成分を用いることによる低次元化に加え、欠損データに対してロバストであるという利点が知られている [8]。

本研究では、センサで計測した翼の表面圧力データから流れ場の状態を推定するシステムを、部分空間法によって実現することを目指す。モード解析によって得られた基底が張る部分空間は、異なる状態の流れ場、例えば付着流れと剥離流れではグラスマン多様体上で離れた点に位置していると考えられる。具体的には、グラスマン判別分析 (Grassmann Discriminant Analysis: GDA) [8] を使用した流れ場の状態判別手法を提案する。GDA は、カーネル法を使用することによってグラスマン多様体上の点に線形なクラス判別を行う手法であり、複雑な計算を行わずに高い精度で判別が行えることが知られている。提案手法の実証のため、マイ

クロフォンを用いた翼表面の圧力の計測を行い、PODモードを抽出する。これらのモードの張る部分空間により、計測データはグラスマン多様体上の1点として考えることができる。翼をさまざまな迎角に変化させて計測を行い、これを訓練データとしてGDAによって流れの剥離状態と付着状態を判別する識別ベクトルを得る。これを用いて、剥離状態、及びPAによる流体制御時での計測を行い、流れ場の判別性能を検証する。

## 2. 解析手法

### 2-1 固有直交分解

本研究では、 $n$  個のマイクから取得した圧力変動の時系列データ  $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^n$  に対して POD を行う。POD では、 $\mathbf{p}(t)$  を最も良く表現する正規直交基底である POD モード  $\{\phi_k\}_{k=1}^r$  ( $r < n$ ) を抽出する。このとき、 $\mathbf{p}(t)$  はモード  $\phi_k$  と展開係数  $a_k(t)$  を用いて次のように表せる [7]。

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=1}^r a_k(t) \phi_k. \quad (1)$$

### 2-2 グラスマン多様体

流れ場のパラメータが異なる  $i, j$  のデータセットに対して POD を行い、POD モード  $\{\phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_r^i\}$  および  $\{\phi_1^j, \phi_2^j, \dots, \phi_r^j\}$  が得られたとする。これらの基底を用いて部分空間  $\text{span}(\mathbf{Y}_i) = \text{span}\{\phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_r^i\}$  および  $\text{span}(\mathbf{Y}_j) = \text{span}\{\phi_1^j, \phi_2^j, \dots, \phi_r^j\}$  を考える。ここで、 $\text{span}(\mathbf{Y}_i)$  は  $n \times r$  行列  $\mathbf{Y}_i = [\phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_r^i]$  の列ベクトルによって張られる部分空間である。これらの部分空間の類似度はグラスマン多様体上の問題として定式化できる。グラスマン多様体とは、 $\mathbb{R}^n$  における全ての  $r$  次元線形部分空間の集合であり、 $\text{Gr}(r, n)$  と表記される。 $\text{span}(\mathbf{Y}_i)$  と  $\text{span}(\mathbf{Y}_j)$  はグラスマン多様体  $\text{Gr}(r, n)$  上で2つの点として表される。

### 2-3 グラスマン判別分析

GDA では、線形判別分析を用いてグラスマン多様体上のクラス判別を行うことを考える。 $N$  個の計測データに POD を行った場合、それぞれを代表するグラスマン多様体上の点  $\{x_i\}_{i=1}^N \in \text{Gr}(r, n)$  を得ることができる。また、これには  $\{y_i\}_{i=1}^N$  ( $y_i \in \{1, \dots, C\}$ ,  $C$  は整数) のようなクラスのラベリングを行う。本研究の場合は、 $C = 2$  とし、流れが付着状態の場合は  $y_i = 1$ 、剥離状態の場合は  $y_i = 2$  とする。このようなグラスマン多様体上の点を再生核ヒルベルト空間  $H$  への写像  $\psi : \text{Gr} \rightarrow H$  [10] により、 $\{\psi(x_i)\}_{i=1}^N \in H$  のように変換する。 $H$  上では、グラスマン多様体上のデータセットを線形に判別することが可能となる。

このようなベクトル  $\psi$  を求めるにはコストの高い計算が必要となり不可能であることが多いが、写像が Mercer の条件 [10] を満たしている場合、この空間での内積は次のようにカーネル関数  $k$  を用いて評価することができる。

$$k(x_i, x_j) = \langle \psi(x_i), \psi(x_j) \rangle. \quad (2)$$

ここで、 $\langle \psi(x_i), \psi(x_j) \rangle$  は  $\psi(x_i)$  と  $\psi(x_j)$  の内積を表す。Mercer の条件とは  $k$  が正定値カーネルであること、すなわち任意の  $\{x_i\}_{i=1}^N$  と  $\{c_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}$  に対し、

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j k(x_i, x_j) \geq 0 \quad (3)$$

を満たすことである。カーネル関数のうちグラスマン多様体上の点に対して使用するものはグラスマンカーネルと呼ばれ、本研究では次のような projection kernel [8] を用いる。

$$k(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = \|\mathbf{Y}_i^T \mathbf{Y}_j\|_F^2. \quad (4)$$

$\|\cdot\|_F$  は行列のフロベニウスノルムを表す。

このようにして得られた  $\{\psi(x_i)\}_{i=1}^N$  に対して中心化

$$\tilde{\psi} = \psi - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi_n \quad (5)$$

を行い、そのクラス間共分散行列  $\mathbf{S}_b$ 、クラス内共分散行列  $\mathbf{S}_w$  を次のように求める。

$$\mathbf{S}_b = \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C \mu_c \mu_c^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{S}_w = \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \tilde{\psi}_{ci} \tilde{\psi}_{ci}^T. \quad (7)$$

ここで、 $N_c$  はクラス  $c$  に含まれる要素数、 $\mu_c$  はクラス  $c$  内の平均

$$\mu_c = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \tilde{\psi}_{ci} \quad (8)$$

である。GDA では、これらの  $\mathbf{S}_b, \mathbf{S}_w$  を用いた次の評価関数を最大にすることで、サンプルのクラスをよく判別する方向  $\mathbf{w}$  を求める。

$$L(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_b \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w}}. \quad (9)$$

$\mathbf{w}$  は係数行列  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$  と  $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$  を用いて  $\psi$  の線型結合

$$\mathbf{w} = \Psi \alpha \quad (10)$$

で表すことができる。式 (2), (5), (6), (7), (10) を用いて、式 (9) は次のように表せる。

$$L(\alpha) = \frac{\alpha^T \Psi^T \mathbf{S}_b \Psi \alpha}{\alpha^T \Psi^T \mathbf{S}_w \Psi \alpha} = \frac{\alpha^T \mathbf{K}_{\text{train}} (\mathbf{V} - \mathbf{1} \mathbf{1}^T / N) \mathbf{K}_{\text{train}} \alpha}{\alpha^T (\mathbf{K}_{\text{train}} (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \mathbf{K}_{\text{train}} + \sigma^2 \mathbf{I}) \alpha}. \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{1}$  は全ての要素が1の  $N$  次元ベクトル、 $\sigma^2 \mathbf{I}$  は正則化項である。また、 $\mathbf{V}$  はブロック対角行列であり、 $c$  番目のブロックは  $N_c \times N_c$  の全ての要素が1の行列を  $N_c$  で割ったものである。 $\mathbf{K}_{\text{train}}$  は訓練データにグラスマンカーネルを適用して得られるカーネル行列であり、各成分は

$$[\mathbf{K}_{\text{train}}]_{ij} = k(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) \quad (12)$$

のように、訓練データの全てのデータセットに対して計算する。式 (9) を最大化する  $\mathbf{w}$  は式 (11) を最大にする  $\alpha$  を求める問題に帰着でき、これは  $(\Psi^T \mathbf{S}_w \Psi)^{-1} (\Psi^T \mathbf{S}_b \Psi)$  の最大の固有値を持つ固有ベクトルに対応する。

この判別ベクトル  $\mathbf{w}$  は訓練データのクラスをよく判別することから、次のように  $\psi(x_i)$  を  $\mathbf{w}$  方向に写像することで訓練データのクラスを判別する指標  $\mathbf{F}_{\text{train}}(x_i)$  を得ることができる。

$$\mathbf{F}_{\text{train}}(x_i) = \mathbf{w} \psi(x_i) = \alpha^T (\mathbf{K}_{\text{train}})_i. \quad (13)$$

ここで、第 3 辺は式 (2), (10) から求められ、 $(\mathbf{K}_{\text{train}})_i$  は  $\mathbf{K}_{\text{train}}$  の  $i$  列目である。さらに全ての訓練データ  $\mathbf{Y}_i$  とテストデータ  $\mathbf{Y}_j$  に対してカーネル行列

$$[\mathbf{K}_{\text{test}}]_{ij} = k(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) \quad (14)$$

を求め、式 (13) と同様の写像

$$\mathbf{F}_{\text{test}}(x_j) = \alpha^T (\mathbf{K}_{\text{test}})_j \quad (15)$$

を行うことで、テストデータのクラスを判別する指標  $\mathbf{F}_{\text{test}}(x_j)$  を得ることができる。このような  $\mathbf{F}_{\text{train}}$  と  $\mathbf{F}_{\text{test}}$  のユークリッド距離を計算し、テストデータは、その距離が最も小さい  $\mathbf{F}_{\text{train}}(x_i)$  を持つ訓練データ  $x_i$  を含むクラスに判別される。

### 3. 実験手法

実験で用いた翼模型と PA の構成を Fig. 1 に示す。翼模型は翼弦長 0.4 m、翼幅 0.4 m の NACA0015 翼を用い、前縁から 10% の位置に PA を配置した。PA の電極には厚さ 100  $\mu\text{m}$ 、幅 10 mm の銅テープ、誘電体には厚さ 90  $\mu\text{m}$ 、幅 10 mm のポリイミドテープを用いた。圧力センサとしては、MEMS デジタルマイクロフォン (INMP621, InvenSense) を用いた。マイクロフォンは翼の前縁 12.5–39.5% の位置に 28ch を等間隔で配置し、翼の負圧面の圧力変動を計測した。計測はサンプリング周波数 25 kHz で行った。また、マイクロフォンの計測と同期して粒子画像流速測定法 (Particle Image Velocimetry: PIV) による速度場の計測を行った。主流速度は 4.0 m/s であり、翼弦長に基づくレイノルズ数は  $1.1 \times 10^5$  である。

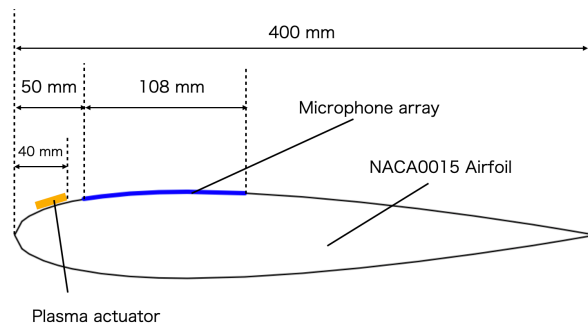


Fig. 1: 使用した翼模型の概要。

実験では、まず翼の迎角を 0–24 deg まで 2 deg ず

つ変化させた場合の圧力をそれぞれ 10 秒間計測した。それぞれの迎角の計測データはその流れ場の状態から、付着/剥離流れのラベル付けをされた訓練データセットとした。続いて翼の迎角を 21 deg として、PA による流体制御を行った場合の圧力を 10 秒間計測した。PA は印加する電圧を一定周波数でオンとオフを繰り返すバースト駆動による制御を行った。このとき、パラメータとして無次元バースト周波数

$$F^+ = \frac{f^+ c}{U_\infty} \quad (16)$$

を変化させて計測した。ここで、 $f^+$  はバースト周波数、 $c$  は翼弦長、 $U_\infty$  は主流速度である。本実験では、PA を off、 $F^+ = 0.1, 1, 10, 20$  とした場合についてそれぞれ 10 秒間の計測を行った。また、迎角 21 deg、 $F^+ = 10$  の場合については計測開始から 1 秒間は PA を off とし、その後 9 秒間 PA の流体制御を行ったケースの計測を行った。これによって、流れが剥離状態から付着状態に遷移する条件での判別分析の結果を調査した。

### 4. 結果及び考察

#### 4-1 圧力変動と流れ場の計測結果

計測した 9 秒間の圧力変動の RMS 値の翼弦方向の分布を Fig. 2 に示す。縦軸は圧力を動圧で無次元化した値を示している。RMS 値は、小さい迎角では計測範囲の全体で小さく、迎角の増大に伴い 18 deg までは前縁での値が大きくなる傾向が見られた。先行研究でもこの傾向が見られており [11]、翼弦方向の圧力変動は層流剥離が起きた位置から大きく増加し、再付着点のわずかに上流で最大となった後減少することが知られている。一方で、さらに大きい迎角では圧力変動が大きく減少した。これは層流剥離泡の崩壊によって剥離した流れの再付着が起こらなくなり、乱流による圧力変動が翼表面から離れた位置で起こっていることによると考えられている。これらの計測結果から、本実験では迎角 0–18 deg を付着流れ、20–24 deg を剥離流れであると分類した。

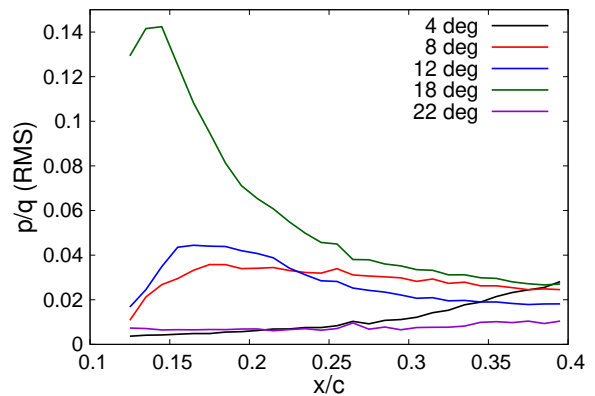


Fig. 2: 圧力変動の RMS 値。

迎角 21 deg における流体制御時と非制御時の主流

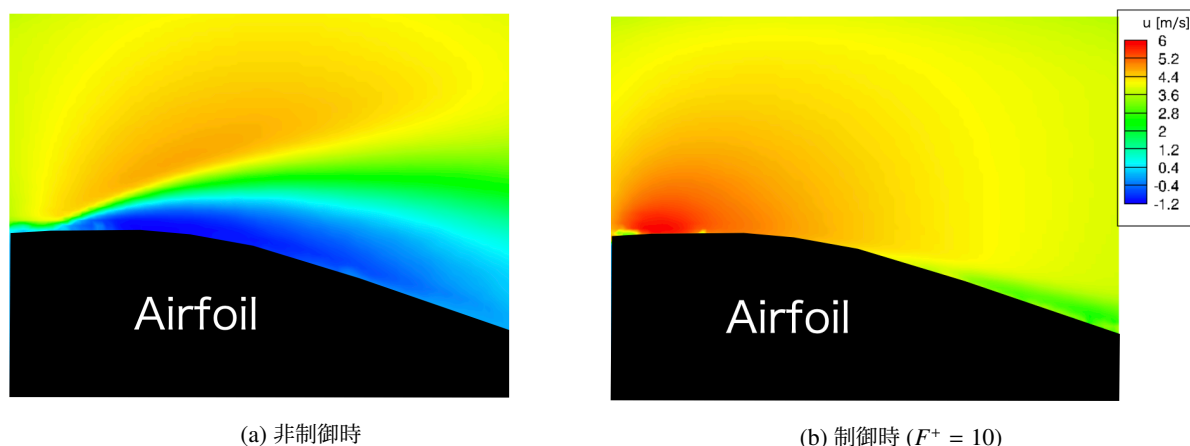


Fig. 3: 迎角 21 deg における速度場.

方向の速度場を Fig. 3 に示す。速度場は 9 秒間の平均を示している。Fig. 3 (a) では、翼表面付近の広い範囲で速度が負の領域が見られ、流れが剥離していることが分かる。一方で、Fig. 3 (b) では PA の駆動によって剥離が抑えられ、流れが翼に沿って付着していることが確認された。

#### 4-2 抽出した POD モード

計測データから取得した迎角 4, 18, 22 deg の POD モードを Fig. 4 に示す。横軸には翼弦方向位置、縦軸にはモードの振幅を表している。モードの取得には 1 秒間の計測データを用いた。迎角が低い場合では、計測範囲の後縁側で圧力変動を起こすようなモードが上位に見られた (Fig. 4 (a))。迎角を大きくすると、このような上位モードの圧力変動は前縁側に見られた (Fig. 4 (b))。これは剥離泡の位置が前縁側に変化していることに対応していると考えられる。一方で、4-1 節の結果で迎角 22 deg での流れは剥離していることが示されたが、Fig. 4 (c) に示すように剥離流れでは付着流れとは異なり、計測範囲の全体で圧力が変動するモードが見られた。

続いて、迎角を 21 deg として計測した流体制御時、及び非制御時の POD モードを Fig. 5 に示す。モードの取得には 0.3 秒間の計測データを用いた。迎角 21 deg の流体非制御時には、Fig. 4 (c) と同様の剥離流れの特徴を持つモードが見られた (Fig. 5 (a))。PA によって剥離制御を行った場合は計測範囲の前縁側で大きく、後縁側でほとんど変動しないような圧力変動が見られ、Fig. 4 (b) と類似したモードとなった (Fig. 5 (b))。これは、バースト周波数  $F^+ = 10$  における流体制御が、PA 配置位置の下流において剥離泡の再付着を促進することにより実現されているためと考えられる。[12].

#### 4-3 GDA による解析結果

GDA を行う際に、4-1 節の結果をもとに訓練データに対し、迎角 0-18 deg は付着流れ (クラス 1)、迎角 20-24 deg は剥離流れ (クラス 2) であるとしてクラスを与えた。また、計測した 10 秒間のうち、計測開始

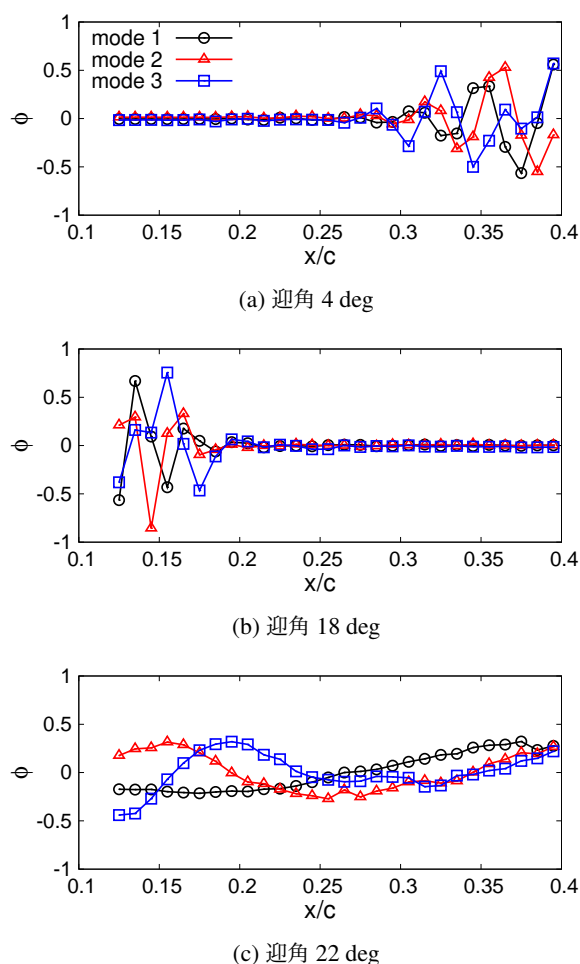


Fig. 4: 非制御流れの POD モード.

から 1-10 秒後のデータを 1 秒ずつ分割し、1 つの迎角に対して 9 つのデータセットでそれぞれ POD を行い、合計 117 の部分空間を訓練データセットとした。テストデータは、それぞれの計測条件で 0.3 秒の計測データを使用して POD を行った。判別分析の際に

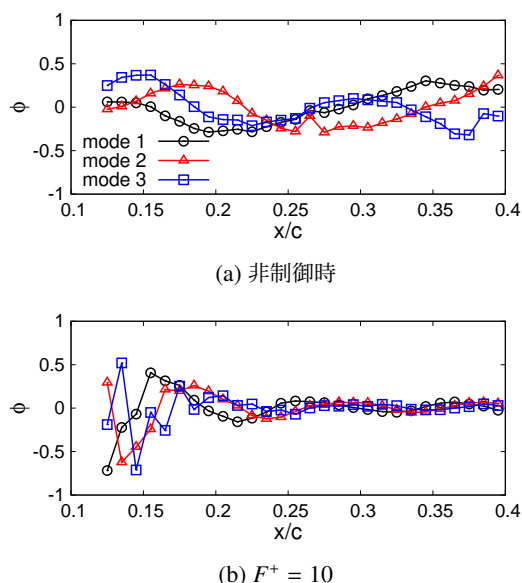


Fig. 5: 流体制御時の POD モード.

は式 (11) の正則化項を  $\sigma = 0.1$  とし、使用する POD モードは上位から 6 個のモードを用いた。

Fig. 6 には、判別に用いた式 (13), (15) の値を示している。本研究では 2 クラス判別を行ったため、式 (11) によって得られる  $\alpha$  は  $N \times 1$  の行列となり、 $F_{\text{train}}$  及び  $F_{\text{test}}$  はスカラーの値を持つ。 $F_{\text{train}}$  については、付着流れの訓練データは  $F_{\text{attach}}$ 、剥離流れは  $F_{\text{separation}}$  と区別した。この図に表すような軸上で、それぞれのテストデータに対して  $|F_{\text{test}} - F_{\text{attach}}|$  及び  $|F_{\text{test}} - F_{\text{separation}}|$  を求め、最小の値を持つクラスに判別を行った。この結果から、off,  $F^+ = 0.1$  は剥離流れ、 $F^+ = 1, 10, 20$  は付着流れであると判別され、実際の流れ場に対応したクラスに判別が行われていることが確認できた。また、非制御時から PA のバースト周波数を増加させていくと  $F_{\text{test}}$  の値が剥離から付着に近づいており、これらの  $F$  の値が流れの状態判別の適切な指標となっていることが考えられる。

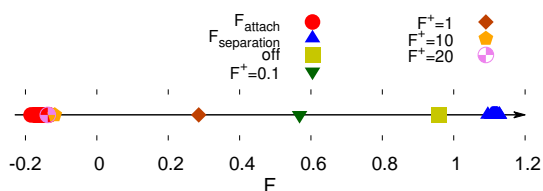


Fig. 6: 判別分析結果.

#### 4.4 判別分析結果の時間変化

迎角を  $21^\circ$  とし、計測開始 1 秒後から PA を駆動させた計測データに対する GDA の結果を Fig. 7 に示す。横軸は計測開始時からの経過時間  $t$ 、縦軸はテストデータの  $F_{\text{test}}$  を表している。2 クラス分類の際、 $F_{\text{test}}$  の値が  $F_{\text{attach}}$  の最大値  $F_{\text{attach(max)}}$  と  $F_{\text{separation}}$  の最小値  $F_{\text{separation(min)}}$  のどちらに近いことによって判

別が行われるため、その平均値を境界として示している。本実験の計測結果では  $F_{\text{attach(max)}} = -0.132$ ,  $F_{\text{separation(min)}} = 1.095$  である。また、判別分析の際に POD は 0.1 秒ずつのデータを用いて行っている。この図から、 $t = 3.1$  s までは流れは剥離状態にあり、 $t = 3.3$  s で付着が起こっていると判別された。また、 $t = 3.2$  s では  $F_{\text{test}}$  は剥離と付着の判別境界付近の値となった。

Fig. 8 に、判別分析の結果に変化が生じた時点の前後である  $t = 3.1, 3.3$  s での主流方向の速度場を示す。 $t = 3.1$  s (Fig. 8 (a)) の流れ場には、計測範囲の前縁部分で流れの付着が見られるが、その範囲は PA を配置した位置の近傍に限られている。一方で  $t = 3.3$  s (Fig. 8 (b)) の流れ場には、Fig. 8 (a) よりも広範囲で付着している様子が確認でき、PA による剥離制御効果が現れている状態であると考えられる。これらの判別分析と流れ場計測の結果から、GDA によって流れ場の状態にリアルタイムに対応した判別が行えることが確認できた。また、Fig. 7 で  $F_{\text{test}}$  の値が  $t = 3.1\text{--}3.3$  s の遷移状態以外の時間では安定して境界から離れた値となっていることから、誤認識の少ない頑強な判別を行っていることが分かる。

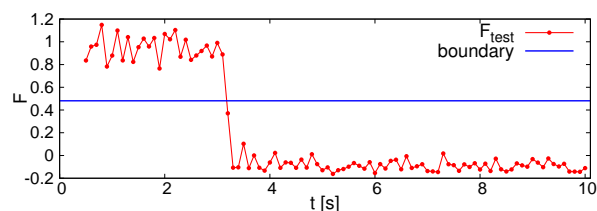


Fig. 7: 判別分析結果の時間変化.

#### 5. 結言

本研究では部分空間の判別分析を用いた流れ場の判別手法を提案した。実験によって得た翼面圧力データの POD モードを取得し、そのモードが張る部分空間にグラスマン判別分析を行うことで、流れの剥離状態と PA による流体制御効果の判別を行った。

POD モードを抽出した結果、失速前の迎角で見られた流れの再付着が POD の上位のモードに現れており、前縁で大きく後縁側で小さい圧力変動が見られた。一方で、剥離状態の場合は計測範囲の全体で圧力が変動するモードが見られた。また、PA による流体制御により流れの再付着が促進され、十分な効果が得られた駆動条件では付着流れと同様のモードが見られた。

POD モードの張る部分空間に GDA を行った結果、剥離流れである迎角  $21^\circ$  の部分空間は剥離のクラスに、PA による流体制御を行った場合の部分空間はバースト周波数  $F^+$  が 1 以上の条件で付着流れのクラスに判別され、GDA が実際の流れ場の状態を判別できていることが分かった。また、非制御状態から制御状態への遷移をするような流れ場に対して、GDA はその遷移状態を捉えることができ、フィードバック制御システムに有用な手法であることを示した。今後は



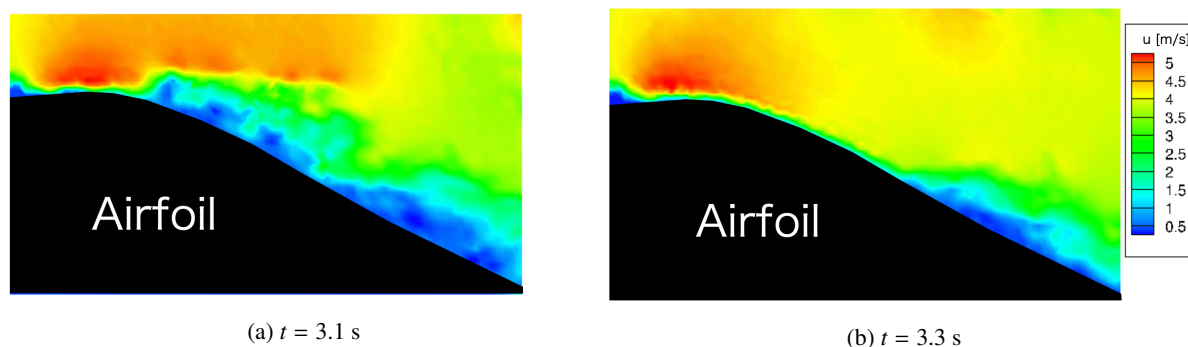


Fig. 8: 判別分析結果の変化点前後の主流方向速度の空間分布.

部分空間追跡などを用いて、判別に用いる部分空間の取得を高速化することによってフィードバック制御システムの実現を目指す。

#### 参考文献

- [1] J. R. Roth and X. Dai, “Optimization of the Aerodynamic Plasma Actuator as an Electrohydrodynamic (EHD) Electrical Device”, AIAA Paper 2006-1203 (2006).
- [2] T. Ogawa, K. Asada, S. Sekimoto, T. Tatsukawa, and K. Fujii, “Dynamic Burst Actuation to Enhance the Flow Control Authority of Plasma Actuators”, Aerospace **2021**, 8, 396 (2021).
- [3] S. L. Brunton and B. R. Noack, “Closed-Loop Turbulence Control: Progress and Challenges”, Applied Mechanics Reviews **67**, 050801 (2015).
- [4] S. Shimomura, S. Sekimoto, A. Oyama, K. Fujii, and H. Nishida, “Closed-Loop Flow Separation Control Using the Deep Q Network over Airfoil”, AIAA Journal **58**, 4260–4270 (2020).
- [5] J. Seidel, S. Siegel, K. Cohen, and T. McLaughlin, “POD Based Separation Control on the NACA0015 Airfoil”, AIAA Paper 2005-297 (2005).
- [6] E. A. Deem, L. N. Cattafesta, M. S. Hemati, H. Zhang, C. Rowley, and R. Mittal, “Adaptive Separation Control of a Laminar Boundary Layer Using Online Dynamic Mode Decomposition”, Journal of Fluid Mechanics **903**, A21 (2020).
- [7] 平邦彦, “固有直交分解による流体解析: 1. 基礎”, ながれ **30**, 115–123 (2011).
- [8] J. Hamm and D. D. Lee, “Grassmann Discriminant Analysis: a Unifying View on Subspace-Based Learning”, Proceedings of the 25th International Conference on Machine Learning, 376–383 (2008).
- [9] L. Yongmin, G. Shaogang, and L. Heather, “Recognising Trajectories of Facial Identities Using Kernel Discriminant Analysis”, Image and Vision Computing **21**, 1077–1086 (2003).
- [10] S. Shirazi, M. T. Harandi, C. Sanderson, A. Alavi, and B. C. Lovell, “Clustering on Grassmann Manifolds via Kernel Embedding with Application to Action Analysis”, 19th IEEE international conference on image processing, 781–784 (2012).
- [11] R. Gerakopoulos and S. Yarusevych, “Novel Time-Resolved Pressure Measurements on an Airfoil at a Low Reynolds Number”, AIAA Journal **50**, 1189–1200 (2012).
- [12] H. Aono, S. Kawai, T. Nonomura, M. Sato, K. Fujii, and K. Okada, “Plasma-Actuator Burst-Mode Frequency Effects on Leading-Edge Flow-Separation Control at Reynolds Number  $2.6 \times 10^5$ ”, AIAA Journal **55**, 3789–3806 (2017).