

2B04 超大規模 LES データにおけるハンケル DMD の有効性と厳密な並列化

浅田啓幸，河合宗司（東北大学）

Effectiveness and exact parallelization of Hankel DMD for large-scale LES data

Hiroyuki Asada, Soshi Kawai (Tohoku University)

Key Words: Fluid Dynamics, LES, Numerical analysis

Abstract

The effectiveness of Hankel dynamic mode decomposition (DMD) for large-scale flow data obtained by high-fidelity large-eddy simulations (LES) is examined by developing a parallel algorithm of the Hankel DMD. The Hankel DMD enhances the accuracy of the modal decomposition by accumulating a data matrix in the row direction with a time shift to enrich the information contained in instantaneous flow data. The issues of the Hankel DMD for data collected by numerical simulations are that since the data matrix is tall and skinny, the accumulated data matrix used in the Hankel DMD becomes further tall and skinny, which leads to prohibitive computational cost and required memory. Therefore, although the effectiveness of the Hankel DMD has been reported for small-scale data, not for large-scale data obtained by high-fidelity simulations. This study develops a parallel algorithm for the Hankel DMD that exactly reproduces the results of non-parallelized Hankel DMD. We perform the Hankel DMD for LES data of transonic aircraft buffet consisting of over a billion cells on parallel computations with the developed parallel algorithm and demonstrate the effectiveness of the Hankel DMD for large-scale LES data.

1 緒論

コンピュータの発展に伴い，膨大な格子点数を用いた複雑形状まわりの高忠実な数値シミュレーションが可能になってきている．例えば，本研究グループでは，航空機高揚力形態に対する壁面モデル large-eddy simulation (LES) を百億を超える格子点数で行い，予測が難しいとされる失速付近の揚力係数や主翼上面の剥離パターンを正確に予測している [1]．また，航空機全機形状に対する遷音速バフェット現象の壁面モデル LES を実施し，主翼上面で発生する衝撃波振動や特徴的な圧力伝播の周波数を精度よく予測している [2]．一方，これらの大規模で高忠実な LES で得られた流れ場データは，大規模であるが故に扱いづらく，細い渦スケールを忠実に解像していて，さらには三次元データであるため，データから流体現象を理解することには困難が伴う．

流体のモーダル解析 [3] は，データから特徴的な流体構造を抽出し，流体現象の理解を手助けする有益なツールとなり得る．動的モード分解 (dynamic mode decomposition, DMD) [4,5] は，特定の増幅率と周波数

を有する DMD モードをデータから抽出し，流体力学分野に限らず多くの分野で用いられている．DMD では，瞬間データ (スナップショットデータと呼ぶ) から構成される線形システムを考え，その線形システムを表す行列を固有値分解することでモード分解を行う．線形システムを表す行列はスナップショットデータから一般的な代数計算で推算され，アルゴリズムが単純であるため DMD は実施がしやすい．また，ハンケル DMD [6–8] は，スナップショットデータ (列ベクトル) を時間シフトしながら行方向に蓄積することでデータに含まれる情報量を増加させ，通常の DMD よりも高精度なモード分解を実現する．その有効性 (モード分解の正確性の向上) は Takens の埋め込み定理 [9] によって数学的に示されている上に，スナップショットデータの蓄積以外は通常の DMD と同じアルゴリズムであるため，簡便で広く用いられている [10, 11]．

しかし，ハンケル DMD を格子点数が百億を超える大規模な LES データに用いるには，計算コストと必要メモリの観点で困難が伴う．格子点数が百億点を超えるため，スナップショットデータの列ベクトルも百億点を超える膨大な長さとなり，それをハンケル DMD

を実施するために更に蓄積することは非現実的となる．通常の DMD に対しては，このような大規模データによる膨大な計算コストと必要メモリを削減する方法が提案されており [12–15]，ハンケル DMD への展開も期待できる．しかし，これらの方法は，ユーザーパラメータを含む近似を用いており，その近似の妥当性が扱う問題に依存しかねない．このような問題により，これまでハンケル DMD は小規模データに対して多く用いられており，著者らが知る限り大規模 LES データに適用した例はなく，それ故に大規模 LES データに対するハンケル DMD の有効性も確認されていない．このハンケル DMD による有効性を大規模データに対しても実証するためには，ハンケル DMD によるモード分解を忠実かつ現実なコストとメモリで行うことが必要となる．

本研究では，ハンケル DMD のアルゴリズムを数学的に厳密に行う並列化アルゴリズムを構築し，大規模 LES データに適用することでハンケル DMD の有効性を実証する．構築した並列化アルゴリズム [16] では，スナップショットデータの内積を並列計算し，その結果を用いて大規模行列を含む演算を小規模行列のみの演算に近似なしで変換する．これにより，ハンケル DMD の計算コストと必要メモリは通常の DMD とほぼ同等になり，数十億を超える大規模 LES データに対しても，スパコンを用いた大規模並列計算により 30 分以内でハンケル DMD が実施できる．構築した並列アルゴリズムを，遷音速バフエット現象の LES データに対するハンケル DMD に適用し，通常の DMD とモード分解における正確性を比較することで，大規模データに対するハンケル DMD の有効性を実証する．

2 数値計算法

2.1 DMD

DMD では，スナップショットを縦ベクトルとして並べたデータ行列を，以下のように 2 つ用意する．

$$\begin{aligned} X_{(0,k-1)} &= [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_k], \\ X_{(1,k)} &= [\mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \cdots \ \mathbf{x}_{k+1}]. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで， \mathbf{x}_k は時間 $t = k\Delta t$ におけるスナップショットであり，データ行列 X の下添え字 $(0, k-1)$ は，時間 $t = 0$ から $t = (k-1)\Delta t$ までのスナップショットが含まれていることを示す．これらの時間ステップが 1 つずれた 2 つの行列に対して，以下のように線形的に時

間発展とする．

$$X_{(1,k)} = AX_{(0,k-1)}. \quad (2)$$

DMD の目的は，行列 A の固有値分解を行い，特徴的な構造とそのダイナミクス情報（増幅率と周波数）を，それぞれ固有ベクトルと固有値から抽出することである．行列 A は，特異値分解 $X_{(0,k-1)} = U_r \Sigma_r V_r^T$ を行い，以下のように求める．

$$A = X_{(1,k)} V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T. \quad (3)$$

ここで， V_r は右特異ベクトルからなる行列， Σ_r は特異値からなる対角行列， U_r は左特異ベクトルからなる行列であり，下添え字 r は特異値の順番に応じて上から r 個の特異値および特異ベクトルを用いていることを意味する．行列 A は，サイズが $n \times n$ (n は格子点数 \times 変数の数) であるため，数値計算で得られるデータに対しては巨大な行列となり，固有値分解を行う際の計算コストと必要メモリが大きくなる．そこで，DMD では左特異ベクトルからなる行列 U_r を用いて，行列 A を以下のように近似する．

$$\tilde{A} = U_r^T A U_r. \quad (4)$$

これにより，行列 \tilde{A} のサイズは $r \times r$ となり，小さな行列であるため固有値分解が容易にできる．得られた固有値は，以下のように DMD モードの増幅・減衰率 g と周波数 ω を示す．

$$g_j = \frac{\ln |\lambda_j|}{\Delta t}, \quad \omega_j = \frac{\angle \lambda_j}{\Delta t}. \quad (5)$$

ただし， λ_j は固有値であり，下添え字 j は固有値の番号を示している．より詳しいアルゴリズムは，文献 [17] を参照されたい．

2.2 ハンケル DMD

ハンケル DMD では，データ行列の情報を増長させることで，DMD のモード分解の精度を向上させる．具体的には，データ行列を定義する際に，以下のようにスナップショットを時間シフトしながら行方向に積

層する．

$$H_{(0,k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{k-1-h} \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{k-h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_h & \mathbf{x}_{h+1} & \cdots & \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$H_{(1,k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{k-h} \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \cdots & \mathbf{x}_{k-h+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{h+1} & \mathbf{x}_{h+2} & \cdots & \mathbf{x}_k \end{bmatrix}. \quad (6)$$

ここで、 h はスナップショットの積層数であり、ユーザーが決定するパラメータである．このようにデータ行列を構築した後は、通常の DMD と同じアルゴリズムで DMD モードと増幅率・周波数を求める．ハンケル DMD は、スナップショットのデータサイズが小さい場合に、線形モデルのランクを増長させることでモード分解の精度が向上することが報告されている [6, 7]．しかし、数値計算データのようなスナップショットのデータサイズが大きい場合は、上式のようにただでさえ大きなスナップショットを行方向に積層するため、データ行列 H は非常に背が高く細い行列 (tall-and-skinny matrix) となり、計算コストと必要メモリが膨大となる．ハンケル DMD のより詳細なアルゴリズムは、文献 [6, 7] を参照されたい．

2.3 ハンケル DMD の並列化アルゴリズム

本研究では、格子点数が数百億点規模の大規模数値計算から得られたデータに対して、ハンケル DMD を現実的な計算コストと必要メモリで実現するために、並列化アルゴリズムを構築した [16]．この並列化アルゴリズムでは、行列積 $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ を並列計算し、この行列積 (サイズは $(k+1) \times (k+1)$ で小さい) を用いて、ハンケル DMD のアルゴリズムを小規模行列の演算で表す．並列化を用いない従来のハンケル DMD のアルゴリズムを、数学的に等価な形で小規模行列の演算で表すため、一切の近似がなく従来のハンケル DMD を並列計算上で再現できる．行列積 $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ の並列計算は、行列 $X_{(0,k)}$ を行方向に分割する (数値計算で得られたデータを領域分割することに等しい) ことで、以

下のように容易に行える．

$$X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$$

$$= \begin{bmatrix} X_{(0,k),1}^T & X_{(0,k),2}^T & \cdots & X_{(0,k),N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(0,k),1} \\ X_{(0,k),2} \\ \vdots \\ X_{(0,k),N} \end{bmatrix}$$

$$= X_{(0,k),1}^T X_{(0,k),1} + X_{(0,k),2}^T X_{(0,k),2} + \cdots + X_{(0,k),N}^T X_{(0,k),N}. \quad (7)$$

ここで、 N は行方向への分割数である．この式は、並列計算の各プロセスにおいて行列積 $X_{(0,k),n}^T X_{(0,k),n}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) を計算し、通信によって和をとれば、 $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ が並列計算できることを示している．各プロセスにおける行列積の計算は、領域分割したデータに対して行うため、計算コストも必要メモリも小さい (ただし、全体の必要メモリは並列計算の有無で変わらない)．また、ハンケル行列積 $H_{(0,k)}^T H_{(0,k)}$ は、この行列積 $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ から、以下のように容易に計算できる．

$$H_{(0,k)}^T H_{(0,k)}$$

$$= \begin{bmatrix} X_{(0,k-h)}^T & X_{(1,k-h+1)}^T & \cdots & X_{(h,k)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(0,k-h)} \\ X_{(1,k-h+1)} \\ \vdots \\ X_{(h,k)} \end{bmatrix}$$

$$= X_{(0,k-h)}^T X_{(0,k-h)} + X_{(1,k-h+1)}^T X_{(1,k-h+1)} + \cdots + X_{(h,k)}^T X_{(h,k)}. \quad (8)$$

ここで、行列積 $X_{(j,k-h+j)}^T X_{(j,k-h+j)}$ ($j = 0, 1, \dots, h$) は、式 (7) を用いて並列計算することもできるが、行列積 $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ から以下のようにブロック行列として抽出することができる．

$$X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$$

$$= \begin{bmatrix} X_{(0,a1-1)}^T \\ X_{(a1,a2)}^T \\ X_{(a2+1,k)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(0,b1-1)} & X_{(b1,b2)} & X_{(b2+1,k)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_{(0,a1-1)}^T X_{(0,b1-1)} & X_{(0,a1-1)}^T X_{(b1,b2)} & X_{(0,a1-1)}^T X_{(b2+1,k)} \\ X_{(a1,a2)}^T X_{(0,b1-1)} & X_{(a1,a2)}^T X_{(b1,b2)} & X_{(a1,a2)}^T X_{(b2+1,k)} \\ X_{(a2+1,k)}^T X_{(0,b1-1)} & X_{(a2+1,k)}^T X_{(b1,b2)} & X_{(a2+1,k)}^T X_{(b2+1,k)} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

ただし、 $0 \leq a1, a2, b1, b2, \leq k$ である．例えば、 $X_{(0,k-h)}^T X_{(0,k-h)}$ を求めたいときは、 $a1 = b1 = 0$ および $a2 = b2 = k - h$ とすることで、 $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ から抽出することができる．これにより、並列計算は $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ に対して一度のみ行い、ハンケル DMD のアルゴリズムは全て $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ の並列計算結果で小規模行列の演算で置き換えることができる．また、本並列化アルゴ

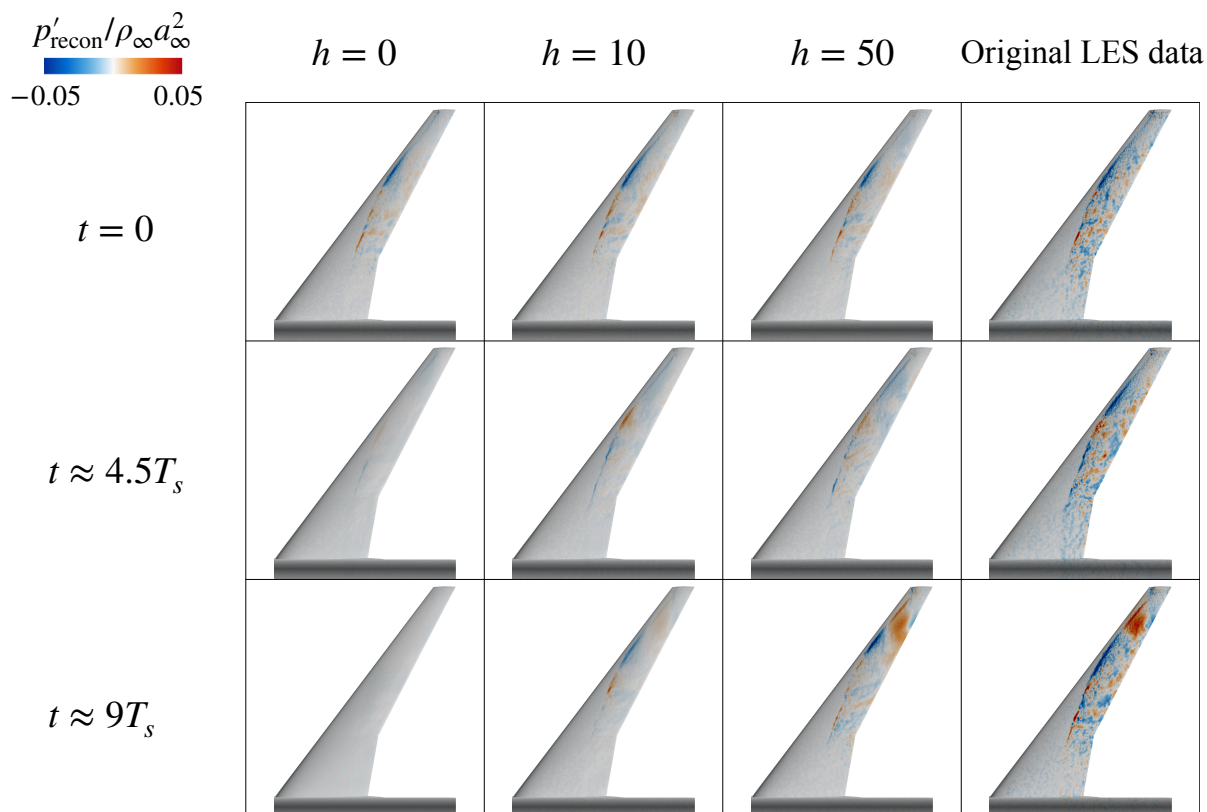


図 1: ハンケル DMD による圧力変動の再構築解 .

リズムにおいては，ハンケル行列を用いない DMD と同様の計算コストと必要メモリでハンケル DMD を実施することが可能となる． $X_{(0,k)}^T X_{(0,k)}$ を用いたハンケル DMD アルゴリズムの書き換えについては，文献 [16] を参照されたい．

3 遷音速パフエット現象 LES データのハンケル DMD

航空機全機形状 (NASA-CRM 遷音速形状 [18]) で発生する 3 次元遷音速パフエット現象の LES データに対しハンケル DMD を実施し，大規模数値計算で得られたデータに対するハンケル DMD の有効性を実証する．LES は圧縮性流体ソルバー FVHC-ACE [1] を用いて実施し，主流マッハ数が $M_\infty = 0.85$ ，平均空力翼弦長 c_{MAC} をベースとしたレイノルズ数が $Re_c = 1.52 \times 10^6$ ，迎角が $\alpha = 5.92 \text{ deg}$ である．この主流条件は，風洞試験 [19] において遷音速パフエット現象が確認された条件である．特に，パフエットセルと呼ばれるスパン方向に波状に伝播する圧力変動が，特徴的な流体構造として報告されている．NASA-

CRM 遷音速形状のまわりに階層型直交格子を生成し，総格子点数は約 22 億点である．計算条件の詳細は，文献 [2] を参照されたい．ハンケル DMD の実施には，前述の並列化アルゴリズム [16] を用い，LES で得られたパフエットセル約 9 周期分の圧力変動スナップショット 200 枚をデータとして用いる．ハンケル DMD の並列計算は，スーパーコンピュータ「富岳」を用い，使用プロセス数は 6,144 である．データ積層数は $h = 0, 10, 50$ とし， $h = 0$ の場合はハンケル DMD を用いない通常の DMD と等価となる．

図 1 に，ハンケル DMD によって得られた時間 $t \approx 0, 4.5T_s, 9T_s$ (T_s はパフエットセルの周波数を $St = 0.3$ としたときの周期) における圧力変動の再構築解を示す． $h = 0, 10, 50$ の全てにおいて， $t = 0$ ではパフエットセルとみられるスパン方向に分布する赤青の縞模様が見られる．しかし，通常の DMD と等価の $h = 0$ では，時間と共にパフエットセルが非物理的に減衰し， $t \approx 9T_s$ においてパフエットセルが見られない．一方， $h = 10$ および 50 では，パフエットセルの非物理的な減衰が小さく， $t \approx 9T_s$ においても特徴的

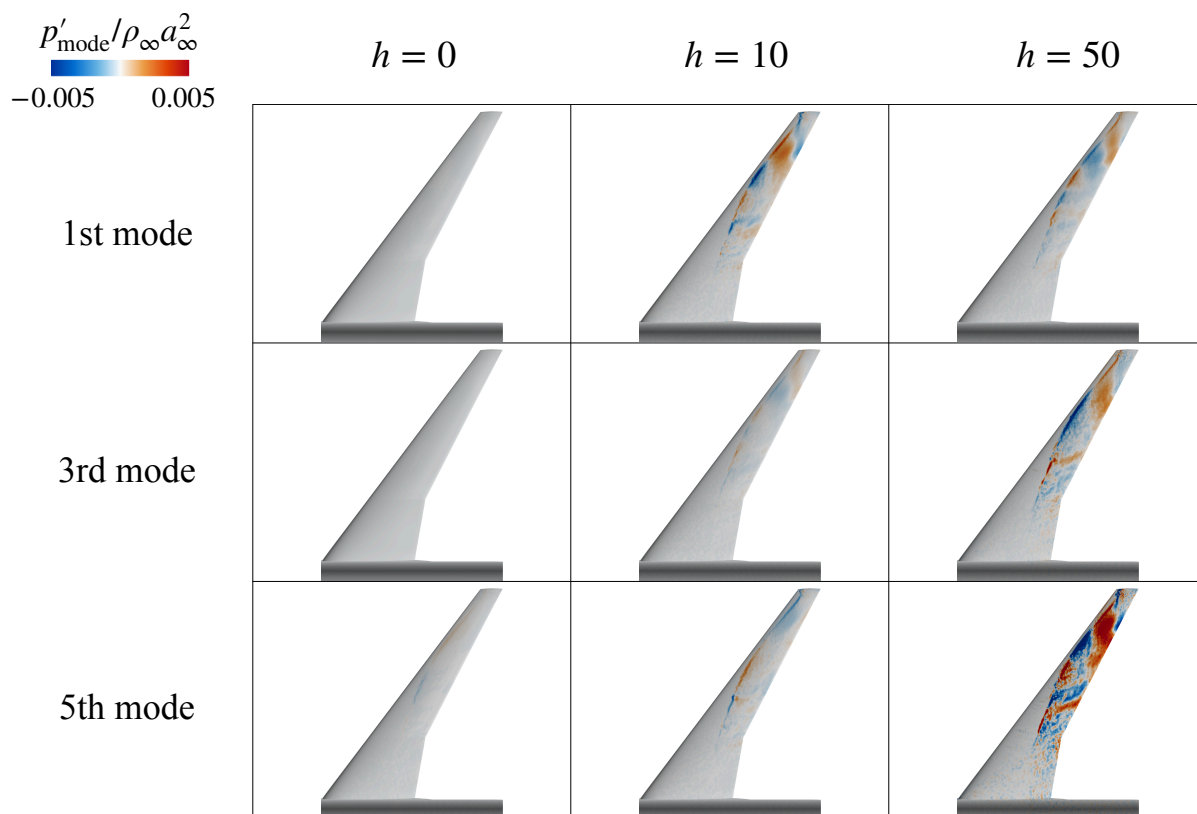


図 2: ハンケル DMD による時間 $t \approx 9T_s$ における圧力変動の DMD モード .

なパフェットセルが見られる．特に， $h = 50$ では，翼端付近の圧力変動分布がオリジナルの LES データとよく一致し，ハンケル DMD によりデータ再構築の精度が向上していると言える．

図 2 に，ハンケル DMD で得られた $t \approx 9T_s$ における圧力変動の DMD モードを示す．貪欲法 [12, 20] を用いて再構築への寄与率に基づきモードの順番を並べ替え，上位 3 つの DMD モードを示している． $h = 0$ では，上位 3 つのモードで特徴的な流体構造が見られない（カラーレンジを狭めれば圧力変動の分布が見られるが， $h = 10$ と 50 のケースと統一してカラーレンジを決めているため見られない）． $h = 10$ では 3 つのモードでスパン方向に分布するパフェットセルのような圧力変動が見受けられ， $h = 50$ ではその特徴的な構造がより鮮明に見られる．これら 3 つのモードの周波数は同一ではなく，パフェットセルの周波数は特定の周波数に限定されず広域に広がっていることを意味している．実際，過去の風洞試験 [21, 22] では，パフェットセルの周波数が $0.2 \leq St \leq 0.5$ 付近で広域に広がっていることを報告しており，本研究のハンケル DMD

による結果の妥当性が伺える．

4 結論

超大規模 LES データに対するハンケル DMD の有効性を実証した．ハンケル DMD は，アルゴリズム上，数値計算データへの適用が難しいとされていたが，並列化アルゴリズムを構築することで，格子点数が数百億点規模の LES データに対してハンケル DMD を実現した．構築した並列化アルゴリズムでは，並列化しないハンケル DMD のアルゴリズムを数学的に等価に再現する．また，並列計算はひとつの行列積に対してのみ行うため，通信コストも低く，現実的な計算コストと必要メモリで，大規模 LES データのハンケル DMD を実現する．この並列化アルゴリズムと大規模並列計算環境を用いることで，航空機全機形状で発生する 3 次元遷音速パフェットのハンケル DMD を実施し，再構築解と特徴的な流体構造へのモード分解という観点で，大規模 LES データに対するハンケル DMD の有効性を実証した．

謝辞

本研究は、文部科学省「富岳」成果創出加速プログラム「航空機デジタルフライトが拓く機体開発 DX に向けた実証研究」（課題番号: JPMXP1020230320）の一環として実施したものです。また、本研究は、理化学研究所のスーパーコンピュータ「富岳」の計算資源の提供を受け、実施しました（課題番号: hp230197(2023年度), hp240203(2024年度), hp250222(2025年度)）。また、本研究の一部は JSPS 科研費 24K17443 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] H. Asada and Y. Tamaki and R. Takaki and T. Yumitori and S. Tamura and K. Hatanaka and K. Imai and H. Maeyama and S. Kawai. FVHC-ACE: fully automated Cartesian-grid-based solver for compressible large-eddy simulation. *AIAA Journal*, Vol. 61, No. 8, pp. 3466–3484, 2023.
- [2] Y. Tamaki and S. Kawai. Wall-modeled LES of transonic buffet over NASA-CRM using Cartesian-grid-based flow solver FVHC-ACE. In *AIAA SCITECH 2023 Forum*, p. 0429, 2023.
- [3] K. Taira, S. L. Brunton, S. T. M. Dawson, C. W. Rowley, T. Colonius, B. J. McKeon, O. T. Schmidt, S. Gordeyev, V. Theofilis, and L. S. Ukeiley. Modal analysis of fluid flows: An overview. *AIAA Journal*, Vol. 55, No. 12, pp. 4013–4041, 2017.
- [4] P. J. Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 656, pp. 5–28, 2010.
- [5] J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton, and J. N. Kutz. On dynamic mode decomposition: Theory and applications. *Journal of Computational Dynamics*, Vol. 1, No. 2, pp. 391–421, 2014.
- [6] H. Arbabi and I. Mezic. Ergodic theory, dynamic mode decomposition, and computation of spectral properties of the Koopman operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 16, No. 4, pp. 2096–2126, 2017.
- [7] K. P. Champion, S. L. Brunton, and J. N. Kutz. Discovery of nonlinear multiscale systems: sampling strategies and embeddings. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 18, No. 1, pp. 312–333, 2019.
- [8] M. Kamb, E. Kaiser, S. L. Brunton, and J. N. Kutz. Time-delay observables for Koopman: theory and applications. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 19, No. 2, pp. 886–917, 2020.
- [9] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980: proceedings of a symposium held at the University of Warwick 1979/80*, pp. 366–381. Springer, 2006.
- [10] E. V. Filho and P. L. dos Santos. A dynamic mode decomposition approach with hankel blocks to forecast multi-channel temporal series. *IEEE Control Systems Letters*, Vol. 3, No. 3, pp. 739–744, 2019.
- [11] K. Fujii, N. Takeishi, B. Kibushi, M. Kouzaki, and Y. Kawahara. Data-driven spectral analysis for coordinative structures in periodic human locomotion. *Scientific Reports*, Vol. 9, No. 1, p. 16755, 2019.
- [12] Y. Ohmichi. Preconditioned dynamic mode decomposition and mode selection algorithms for large datasets using incremental proper orthogonal decomposition. *AIP Advances*, Vol. 7, No. 7, 2017.
- [13] N. B. Erichson, L. Mathelin, J. N. Kutz, and S. L. Brunton. Randomized dynamic mode decomposition. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 18, No. 4, pp. 1867–1891, 2019.
- [14] S. L. Brunton, J. L. Proctor, J. H. Tu, and J. N. Kutz. Compressed sensing and dynamic mode decomposition. *Journal of Computational Dynamics*, Vol. 2, No. 2, pp. 165–191, 2016.
- [15] T. Sayadi and P. J. Schmid. Parallel data-driven decomposition algorithm for large-scale datasets: with application to transitional boundary layers. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 30, pp. 415–428, 2016.
- [16] H. Asada and S. Kawai. Exact parallelized dynamic mode decomposition with Hankel matrix for large-scale flow data. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 39, No. 1, pp. 1–36, 2025.
- [17] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton, and

- J. L. Proctor. *Dynamic mode decomposition: data-driven modeling of complex systems*. SIAM, 2016.
- [18] J. Vassberg, M. Dehaan, M. Rivers, and R. Wahls. Development of a common research model for applied CFD validation studies. In *26th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 2008. AIAA paper, No. 2008-6919.
- [19] S. Koike, M. Ueno, K. Nakakita, and A. Hashimoto. Unsteady pressure measurement of transonic buffet on NASA common research model. In *34th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 2016. AIAA paper, No. 2016-4044.
- [20] B. K. Natarajan. Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 24, No. 2, pp. 227–234, 1995.
- [21] Y. Sugioka, K. Nakakita, S. Koike, T. Nakajima, T. Nonomura, and K. Asai. Characteristic unsteady pressure field on a civil aircraft wing related to the onset of transonic buffet. *Experiments in Fluids*, Vol. 62, pp. 1–18, 2021.
- [22] Y. Sugioka, S. Koike, K. Nakakita, D. Numata, T. Nonomura, and K. Asai. Experimental analysis of transonic buffet on a 3D swept wing using fast-response pressure-sensitive paint. *Experiments in Fluids*, Vol. 59, pp. 1–20, 2018.