

2D06 一様等方性乱流と干渉した球面衝撃波に発生する変形に関する球面調和関数展開によるスケール解析

○田中健人，渡邊大成，鈴木博貴，河内俊憲（岡山大学）

Scale Analysis Based on Spherical Harmonic Decomposition of Deformations in a Spherical Shock Wave Interacting with Homogeneous Isotropic Turbulence

Kento Tanaka, Taisei Watanabe, Hiroki Suzuki and Toshinori Kouchi (Okayama University)

Key Words : Spherical shock wave, Turbulence, Spherical harmonic function

Abstract

We conducted direct numerical simulations (DNS) of the interaction between a spherical shock wave and homogeneous isotropic turbulence. The deformation generated on the shock front was analyzed by performing a spherical harmonic decomposition, enabling a scale-based analysis of the deformation. The turbulence parameters were set as a turbulent Mach number of $M_t \approx 0.146$ and a turbulent Reynolds number of $Re_\lambda \approx 60$. The shock wave was initialized by placing a high-energy region at the center of the computational domain, with a central pressure of $P_c \approx 1.75 \times 10^5$ [kPa]. The deformation was defined as the fluctuation in the position of the shock wave. The shock position was determined in spherical coordinates (r, θ, ϕ) as the location of maximum pressure for each (θ, ϕ) . This position was then treated as a function of (θ, ϕ) . The spherical harmonic expansion was truncated at 20 modes. As a result, the lower-order modes were observed to converge in the later stage of the interaction. In contrast, the higher-order modes were found to be amplified even during the later stage. This amplification is attributed to the expansion of the shock front, which caused the scale of interacting vortices to become relatively smaller compared to the size of the shock surface, thereby shifting the amplified modes.

1. はじめに

超音速旅客機の開発を行う上で、機体から発生する衝撃波と大気乱流の干渉は大きな問題となる。実際、計測される圧力波形が計測点によって異なるということが報告されており、ソニックブームの予測を困難にしている原因の一つとなっている^[1]。したがって、衝撃波に対する大気乱流の影響を明らかにする必要がある。しかしながら、大気は平均の速度せん断や密度分布などが存在する非常に複雑な流れ場であるため、その影響を評価することが難しい。そこで、単純化した衝撃波と乱流を干渉させて、その相互作用を明らかにする研究が行われてきた。

衝撃波乱流干渉の研究は実験と数値計算の両方を駆使して行われてきた。Kimらはレーザー集光によって球面衝撃波を生成し、噴流と干渉させるという実験を行った。彼らはシュリーレン法による可視化を行い、球面衝撃波の変形を可視化した^[2]。また、McManamen¹らは垂直衝撃波と乱流の干渉に関する実験を行い、速度変動と温度変動に関して調査を行った^[3]。一方で、数値計算による研究例も多く存在している。Ryuらは垂直衝撃波と一様等方性乱流に関する直接数値計算(DNS)を行い、渦度などの微分量の変

化を調査することで、小スケールの変動の変化について明らかにした^[4]。また、LarssonらのDNSにより示された衝撃波面の変形や崩壊現象は干渉により発生する衝撃波の特性変化の中でも、注目すべき現象である^[5]。

我々の先行研究において、球面衝撃波と一様等方性乱流に関するDNSが行われた^[6]。その中で、衝撃波面の変形を位置の変動として定義した。その変動の標準偏差を算出することで、変形の大きさやその変化に関して調査した。その結果、変形はコルモゴロフスケールの数倍程度のオーダーであることがわかり、伝播に伴って単調に成長することが明らかになった。大きさがコルモゴロフスケールのオーダーであったことは垂直衝撃波の場合^[7]と同様だが、変形が単調に成長するというのは垂直衝撃波と異なっており、球形の衝撃波面の膨張に伴って変形が成長するものと考えている。

本研究では球面衝撃波の波面の変形に関して球面調和関数を用いて級数展開することで、変形のスケールに関する調査を行った。使用したデータは先行研究のDNSで得られたものを使用した。本稿の構成は以下のである。第二章は実施したDNSについ

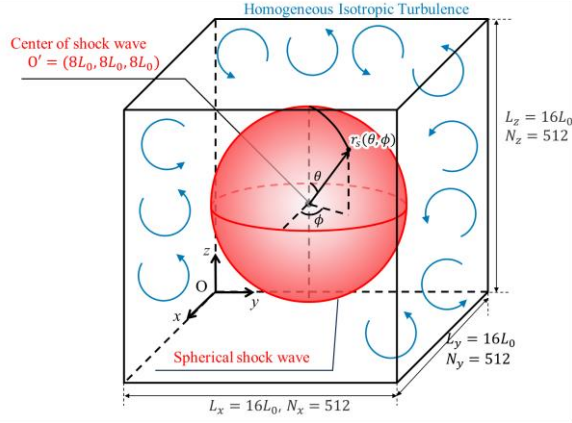


Fig.1 Schematic of flow field

て述べている．第三章は球面調和関数の説明と球面調和関数展開により得られたスケールに関する結果と考察である．第四章は結論となっている．

2. 直接数値計算

本研究が対象とする流れ場は球面衝撃波と一様等方性乱流の干渉である．Fig.1に流れ場と新しく定義した極座標系の概要を示す．計算領域は立方体で、大きさは $(L_x, L_y, L_z) = (16L_0, 16L_0, 16L_0)$ である．また、格子点数は $(N_x, N_y, N_z) = (512, 512, 512)$ である．その概要を図1に示す．球面衝撃波の中心 O' は $(x, y, z) = (8L_0, 8L_0, 8L_0)$ であり、初期において、 O' の近傍に高エネルギー領域を生成することで、球面衝撃波を生成している．計算は衝撃波が境界に到達する前に停止することで、境界条件の影響がないようにしている．

本研究で実施したDNSの支配方程式は式(1)から(3)に示される三次元の圧縮性Navier-Stokes方程式である．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\rho e + P)u_j\} = \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$

これらに加えて式(4)で示される理想気体の状態方程式を用いてDNSを実施した．

$$P = \rho RT \quad (4)$$

ここで、 t は時刻、 x_j は j 方向の位置、 u_j は j 方向の速度、 ρ は密度、 P は圧力、 T は温度、 τ_{ij} は粘性応力テンソル、 e は比全エネルギー、 κ は熱伝導係数である．比全エネルギー e は次の式(5)により求められる量である．

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} u_i^2 \quad (5)$$

また、粘性応力テンソル τ_{ij} は以下の式(6)で計算され

る．

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (6)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 μ は式(7)のSutherlandの式により計算される粘性係数である．

$$\frac{\mu}{\mu_r} = \frac{T_r + S}{T + S} \left(\frac{T}{T_r} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (7)$$

ただし、 T_r と μ_r は基準温度と基準温度における粘性係数で、本研究では、 $T_r = 273$ [K]と $\mu_r = 1.724 \times 10^{-5}$ [Pa · s]である．また、 S はSutherland定数で $S = 110.4$ [K]である．

初期条件は、独立に実施したDNSにより取得した一様等方性乱流中に高エネルギー領域を配置することで生成した^[8]．まず、独立に実施したDNSについて述べる．計算領域は立方体で、大きさは $(L_x, L_y, L_z) = (8L_0, 8L_0, 8L_0)$ である．格子点数は $(N_x, N_y, N_z) = (256, 256, 256)$ とした．ここで、 L_0 はDNSの代表長さで、初期の乱流の積分スケールに相当する量である．初期の乱流は振幅にエネルギースペクトル^[9]、位相に乱数を与えて、逆フーリエ変換することで速度変動を与えている．その後、密度を一定とし、圧力変動はPoisson方程式を解くことで与える．このようにして生成した初期の乱流を全方向周期境界条件のもとで時間発展させた．時間発展ではLinear Forcing^[10]を用いることで粘性による減衰を抑制し、統計的に定常な乱流を生成した．この乱流を各方向に2周期ずつ合計8ブロック並べることで本計算のDNSの計算領域全域を乱流にした．

球面衝撃波は上述したように O' 近傍に高エネルギー領域を生成することで発生させている．エネルギーの付加方法についてはBhagatwalaらの研究で示されている以下の式(8)から(10)を用いている．

$$\rho = \rho_0 \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\rho e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{\rho \Delta e_0}{\epsilon^3} \exp \left(-\frac{r^2}{\epsilon^2} \right) \quad (10)$$

ただし、これらの式は周囲が静止流体の場合のものである．乱流の変動がある場合は以下のように重ね合わせたような式であり、エネルギーのみ影響を受けるような式を用いている．

$$\rho = \rho_t \quad (11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t \quad (12)$$

$$\rho e = \rho e_t + \frac{\rho \Delta e_0}{\epsilon^3} \exp \left(-\frac{r^2}{\epsilon^2} \right) \quad (13)$$

ここで、 ρ_t 、 \mathbf{u}_t 、 e_t は生成した乱流の密度、速度ベクトル、比全エネルギーである．

境界条件は乱流の生成のために行ったDNSから引き継いで全方向周期境界条件を適用している．球面

衝撃波は到達していない領域には影響を及ぼさないため、境界に到達する前に計算を停止すれば境界の影響を受けることはない。したがって、境界の影響を排除するためには乱流が境界の影響を受けないようにすればよく、そのために、時間発展のDNSから継続して全方向周期境界条件を採用している。

数値流束の計算スキームは五次精度WENO法で高精度化したRoe法と六次精度中心差分のハイブリッド法を用いている。ハイブリッド法はDucrosの提案する以下のセンサー^[11]を用いて、Roe法により計算された流束と中心差分により計算された流束を切り替えるという手法を採用している。

$$\phi = \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + (\nabla \times \mathbf{u})^2 + \phi_\epsilon} \quad (14)$$

ここで、 $\phi_\epsilon = 10^{-16}$ は分母が0にならないようにするために導入された定数である。このセンサーは $\nabla \cdot \mathbf{u}$ が大きい領域では、 $\phi \simeq 1$ となり、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ が小さい領域では、 $\phi \simeq 0$ となる。これは流れ場に当てはめると、衝撃波が存在している位置では、圧縮により $\nabla \cdot \mathbf{u}$ が大きな値を取るため $\phi \simeq 1$ である。一方で、衝撃波から離れた乱流の領域では、 $\nabla \times \mathbf{u}$ が $\nabla \cdot \mathbf{u}$ に対して相対的に大きくなるので、 $\phi \simeq 0$ である。したがって、あるしきい値 ϕ_t を設定して、 $\phi \geq \phi_t$ の領域にRoe法、 $\phi < \phi_t$ の領域に中心差分を適用することで、衝撃波による数値振動を抑えつつ、乱流の過度な減衰も防ぐことができる。本研究では、 $\phi_t = 0.4$ としている。時間積分法は四段四次精度のRunge-Kutta法である。

3. 極座標変換と球面調和関数

まず、データ解析のために導入した極座標系について述べる。DNSではデカルト座標系を用いているが、球面衝撃波の解析をするには不向きであると考えたので、球面の中心を原点とする極座標系に変換を行った。もともとのデカルト座標系 (x, y, z) から極座標系 (r, θ, ϕ) の変換は以下の式によって定義される。

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (15)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}\right) \quad (16)$$

$$\phi = \text{sgn}(y) \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\right) \quad (17)$$

ここで、 (x_0, y_0, z_0) は極座標系の原点の座標で $(x_0, y_0, z_0) = (8L_0, 8L_0, 8L_0)$ である。また、 $\text{sgn}(y)$ は符号関数と呼ばれる関数で以下のように定義される。

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} 1 (y \geq 0) \\ -1 (y < 0) \end{cases} \quad (18)$$

変換後の格子点数は $(N_r, N_\theta, N_\phi) = (256, 180, 360)$ で、 r 方向はDNSの格子間隔と同じになるように設定し、 θ と ϕ 方向には間隔が1度になるようにした。デカルト座標系 (x, y, z) から極座標 (r, θ, ϕ) への変換は線形

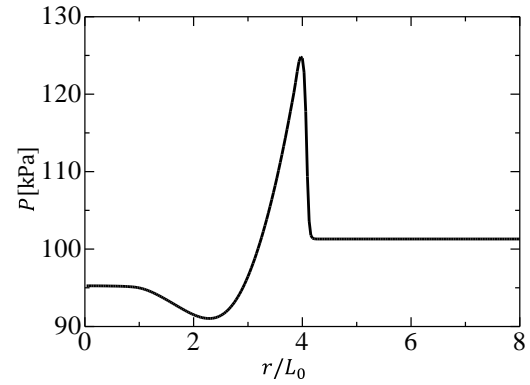


Fig.2 Mean pressure distribution in the r direction $P(r)$ at the time when the mean position of the shock wave is $R_s \simeq 4L_0$.

変換を用いている。

次に、解析の対象としている衝撃波の変形の定義について述べる。衝撃波の変形は先行研究と同様、衝撃波の位置の変動としている。衝撃波の位置の決定には速度ベクトルの発散^[12]や圧力勾配の最小値の位置^[7]とすることが多い。しかしながら、本研究では、極座標変換に線形変換を用いていることから、勾配が不連続になる。そのため、微分量の使用は不確かさの増加につながるため、不適であると考えた。Fig.2に、衝撃波の平均の位置 $R_s \simeq 4L_0$ の時刻における r 方向の圧力の平均分布を示す。ただし、平均は (θ, ϕ) に対して取った。Fig.2にあるように、球面衝撃波の場合は、衝撃波のすぐ背後に膨張波が存在しているので、ある (θ, ϕ) における r 方向の圧力分布 $P(r)$ は衝撃波のすぐ背後で最大値を取り、その後、膨張波によって低下するという分布になる。したがって、勾配を取らずとも、明確な最大値が存在する分布であるため、この最大値を衝撃波の代表位置とすることとした。以上より、衝撃波の位置を r_s とすると、数式的には以下のように定義できる。

$$P(r_s) = \max_r(P(r)) \quad (19)$$

このように定義すると r_s は (θ, ϕ) の関数になり、球面調和関数による分解ができるようになる。

解析するためのデータの定義ができたので、球面調和関数についての説明をする。球面調和関数はその名の通り、ラプラス方程式の解として得られる関数である。特に、解となる斉次多項式を単位球面に制限することで得られる関数である。三次元の場合の球面調和関数は表式が得られていて、以下の式で表される。

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (20)$$

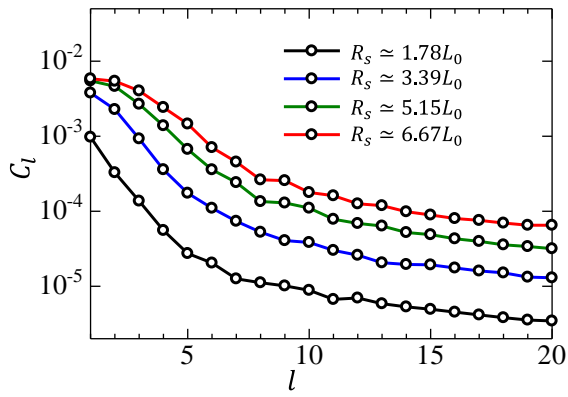


Fig.3 Distribution of the power spectrum C_l in the spherical harmonic expansion. The black line has $R_s = 1.78L_0$, the blue line has $R_s = 3.38L_0$, the green line has $R_s = 5.15L_0$, and the black line has $R_s = 6.67L_0$.

ここで、 l, m は整数で、 $l \geq |m|$ である。ここでは、 l 次数、 m を階数と呼ぶことにする。また、 $P_l^j(x)$ はルジャンドルの陪多項式である。この球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ は極座標において正規直交関数であることが知られているため、関数 $f(\theta, \phi)$ を次のように展開することができる。

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (21)$$

この球面調和関数展開は宇宙論や量子論の分野で活用されており、電子軌道などの解析に用いられている。本研究では先ほど定義した衝撃波位置 $r_s(\theta, \phi)$ を球面調和関数で展開した。

4. 解析結果

Fig.3に乱流マッハ数が $M_t = 0.145$ 、初期の中心圧力が $P_c = 1.72 \times 10^5 [\text{kPa}]$ の条件で行った計算の球面調和関数展開における各次数ごとのパワースペクトル C_l を示す。 C_l は以下のように定義される。

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2 \quad (22)$$

したがって、次数 l におけるすべての階数 m の係数の絶対値を2乗した値の平均値である。ただし、横軸は変動成分である $l \geq 1$ について示している。

図より、どのモードも伝播することによって増幅されていることがわかる。しかし、増幅率はモードによって異なっている。最もスケールが大きく、パワーの高い $l=1$ のモードは収束しており、 $R_s \approx 5.15L_0$ から $R_s \approx 6.67L_0$ への伝播においてはほとんど増幅されていないことがわかる。この収束の影響で、 $R_s \approx 6.67L_0$ の時刻においては、 C_1 と C_2 が同程度にな

っていることがわかる。 C_1 が収束するという結果は、大スケールの変形が保持されていることを意味しており、先行研究において報告された相似な形状を保持して伝播するという事に相当するものと考えられる^[8]。また、波面の膨張に伴い、各モードの示す変形のスケールも大きくなることに注意すると、発生した変形は波面の膨張に伴って、 θ, ϕ 方向に引き伸ばされることがわかる。

高次のモードに関してはモード間で増幅率の差がほとんどなく、伝播とともに様に増幅していることがわかる。先行研究においては単調に変形が成長するという結果が示されているが、これは主に高次のモードの増幅によるものであるということが明らかになった。また、干渉後半における、低次のモードの増幅が緩やかになっていることから、変動全体に対する高次のモードの寄与が相対的に大きくなっていることがわかる。したがって、波面に対して比較的小スケールの変形の影響が強くなることが示唆された。

5. まとめ

球面衝撃波と一様等方性乱流の干渉に関するDNSを行い、波面に発生した変形に関して球面調和関数展開をすることで、変形のスケールに関して考察した。まず、計算領域の中心 $(8L_0, 8L_0, 8L_0)$ を原点とする極座標系 (r, θ, ϕ) を定義し、変換を行った。その後、それぞれの (θ, ϕ) における圧力分布 $P(r)$ が最大となる位置を衝撃波の位置 $r_s(\theta, \phi)$ とした。この r_s に関して球面調和関数展開を施した。その結果、すべてのモードが波面の膨張とともに増幅されることがわかったが、増幅率はモードによって異なることが明らかになった。まず、低次のモードは波面の膨張に従って、増幅が緩やかになる傾向にあり、最も大きなスケールである1次モードに関しては、 $R_s \approx 5.15L_0$ 以降の時刻には収束してしまって、以降はほとんど変化しなくなることがわかった。その結果、 $R_s \approx 6.67L_0$ の時刻においては、2次モードと1次モードのパワースペクトルが同程度になることがわかった。この、収束は先行研究で示唆された、変形が相似形を保って伝播するという事に対応するものと考えられる。一方で小スケールの変形に関する高次のモードはモードごとの増幅率にほとんど変化は見られなかった。したがって、先行研究で明らかになった、変形の成長は低次の大きなスケールの成長よりは高次の小さなスケールの変形の成長によるものであることがわかった。また、低次のモードの増幅が収束し、高次のモードの増幅はほぼ一様に増幅されることから、相対的に高次のモードの変形に対する寄与が大きくなるということが明らか

になった.

謝辞

本研究を行うにあたって、京都大学の長田孝二教授、渡邊智昭准教授、名古屋大学の佐宗章弘教授に多大なご助言をいただいた。この場を借りて感謝の意を表する。本研究はJSPS科研費(19J12973, 23K1349505, 22H01684, 22K18302)の援助を受けて行われた。

参考文献

- [1] D. J. Maglieri, ‘Some Effects of Airplane Operations and the Atmosphere on Sonic-Boom Signatures’, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 39, no. 5B, pp. S36–S42, May 1966.
- [2] J. K. Akihiro and S. Atsushi, ‘Modulations of a weak shock wave through a turbulent slit jet’, pp. 339–345, 2010.
- [3] B. McManamen, D. A. Donzis, S. W. North, and R. D. W. Bowersox, ‘Velocity and temperature fluctuations in a high-speed shock–turbulence interaction’, *J Fluid Mech*, vol. 913, p. A10, 2021.
- [4] D. L. J. Ryu, ‘Vorticity dynamics after the shock – turbulence interaction’, *Shock Waves*, 2015.
- [5] J. Larsson, I. Bermejo-Moreno, and S. K. Lele, ‘Reynolds- and Mach-number effects in canonical shock–turbulence interaction’, *J Fluid Mech*, vol. 717, pp. 293–321, Feb. 2013.
- [6] K. Tanaka, T. Watanabe, H. Suzuki, and T. Kouchi, ‘Spherical shock wave modulation induced by interaction with homogeneous isotropic turbulence’, *Phys. Fluids*, vol. 37, no. 2, Feb. 2025.
- [7] K. Tanaka, T. Watanabe, H. Suzuki, and T. Kouchi, ‘Spherical shock wave modulation induced by interaction with homogeneous isotropic turbulence’, *Phys. Fluids*, vol. 37, no. 2, Feb. 2025.
- [8] S. B. Pope, ‘Turbulent Flows’, *Meas Sci Technol*, vol. 12, no. 11, pp. 2020–2021, Nov. 2001.
- [9] M. R. Petersen and D. Livescu, ‘Forcing for statistically stationary compressible isotropic turbulence’, *Phys. Fluids*, vol. 22, no. 11, p. 116101, Nov. 2010.
- [10] F. Ducros, F. Laporte, T. Soulères, V. Guinot, P. Moinat, and B. Caruelle, ‘High-Order Fluxes for Conservative Skew-Symmetric-like Schemes in Structured Meshes: Application to Compressible Flows’, *J Comput Phys*, vol. 161, no. 1, pp. 114–139, Jun. 2000.
- [11] J. Larsson and S. K. Lele, ‘Direct numerical

simulation of canonical shock/turbulence interaction’, *Physics of Fluids*, vol. 21, no. 12, pp. 1–12, 2009.

- [12] J. Larsson and S. K. Lele, ‘Direct numerical simulations of canonical shock/turbulence interaction’, *International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP*, 2009, pp. 1345–1350.