

## 2E03 SQUIDを用いた圧縮性Navier-Stokes方程式の 直接数値計算

○中澤嵩（金沢大学学術メディア創成センター/（兼）大阪大学D3センター）

DNS of Compressible Navier-Stokes equation with SQUID

Key Words : DND, Compressible Navier-Stokes equation, SQUID

### Abstract

F. De Vuyst suggests a new mathematical model for compressible Euler equation, which is able to decrease calculation costs because Galerkin method could be used for discretizing in space, FVM and DGM. are not used. In this presentation, the author focus on Compressible Navier-Stokes equation and try to solve 2D Viscous Sod Shock Tube Problem at  $Re=200$ .

### 1. はじめに

航空工学や自動車工学では非定常・圧縮性（高レイノルズ数）流体を扱う必要があるため、式(1)に記述している圧縮性Euler方程の利用が一般的である。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho E + p) \mathbf{u}\} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

この圧縮性流体を扱う際、非圧縮性流体と比較して、時空間に複雑な応力分布が発生し、局所的に密度が集中する衝撃波が発生する。このような場合には、衝撃波を高精度に捕捉する必要があるため、界面を高精度に解像することが可能な有限体積法や不連続ガラーキン法等を用いた空間離散化が行われるが、形状最適化を行う際には順問題だけでなく逆問題を解く必要があるためアルゴリズムが非常に煩雑となることが予想される。

### 2. 数理モデル：圧縮性Euler方程式

支配方程式として式(2)に記述しているF. De Vuystが提案している数理モデル(1)を活用することにする。

$$\begin{aligned}\frac{Da_p}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + p \nabla a_p &= 0, \\ \frac{Da_p}{Dt} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

この数理モデル(2)は、密度と圧力に対して $\log$ 変換を行うことで衝撃波近傍における数値フラックスを精度よく近似することが期待されている。

$$a_p = \log(\rho), a_p = \log(p)$$

また、数理モデル(1)と同様の位相速度 $u, u - c, u + c$ や適合方程式

$$\begin{aligned}D_1 \rho - \frac{1}{c^2} D_1 p &= 0, \\ D_2 u + \frac{1}{\rho c} D_2 p &= 0, \\ D_3 u - \frac{1}{\rho c} D_3 p &= 0\end{aligned}$$

が得られることが分かっており、最終的にはリーマン不変量も一致する。結果的に、この数理モデル(2)はこの数理モデル(1)と同等の数学的性質を引き継いでいると考えられる。

### 3. 数理モデル：圧縮性Navier-Stokes方程式

式(2)を圧縮性Navier-Stokes方程式に拡張すると下記のように記述することが出来る。

$$\begin{aligned}\rho \frac{Da_p(\mathbf{x})}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{k}) &= 0, \\ p \frac{D\mathbf{u}(\mathbf{x})}{Dt} + \nabla p &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})^T, \\ p \frac{Da_p}{Dt} + \gamma p(\nabla \cdot \mathbf{k}) &= (\gamma - 1) \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}^T \\ &+ \frac{\gamma \mu}{RePr} \nabla \cdot \{\exp(a_p - a_\rho) \nabla(a_p - a_\rho)\}\end{aligned}\quad (3)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{Re} \left( \nabla \mathbf{u}^T + (\nabla \mathbf{u}^T)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right), T = \frac{p}{\rho}$$

である。

#### 4. 計算モデル：圧縮性Euler方程式

時間方向に離散化する際に、特性曲線法を用いて物質微分を数値的に近似することをするを前提とすると、下記のように $a_p, u, a_p$ に関する偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\rho^{n-1} \frac{Da_p^n(x)}{Dt} + \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) &= 0, \\ \rho^n \frac{D\mathbf{u}^n(x)}{Dt} + \nabla p^n - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{(\nabla p^n) \mathbf{u}^n\} &= 0, \\ p^{n-1} \frac{Da_p^n(x)}{Dt} + \gamma p^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

圧縮性流体場の数値計算には、これまで保存系を用いることが一般的であり、非保存系で記述される数理モデル(2)に関する数値計算スキームはほとんど存在しない。

#### 5. 計算モデル：圧縮性Navier-Stokes方程式

式(4)を圧縮性Navier-Stokes方程式に拡張すると下記のように記述することが出来る。

$$\begin{aligned}\rho^{n-1} \frac{Da_p^{n-1}(x)}{Dt} + \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) &= 0, \\ \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(x)}{Dt} + \{1 + a_p^n - a_p^{n-1}\} \nabla p^n - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{(\nabla p^n) \mathbf{k}^T\} \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^n)^T - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^n)^T \mathbf{k}^T\}, \\ p^{n-1} \frac{Da_p^{n-1}}{Dt} + p^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) + (\gamma - 1) M^{n-1} : \nabla \mathbf{k}^T \\ &= \frac{\gamma \mu}{RePr} \nabla \cdot \{T^n \nabla (a_p^n - a_p^n)\} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\gamma \mu}{RePr} \nabla \cdot \{T^n \nabla (a_p^n - a_p^n)\} \mathbf{k}^T\end{aligned}\quad (5)$$

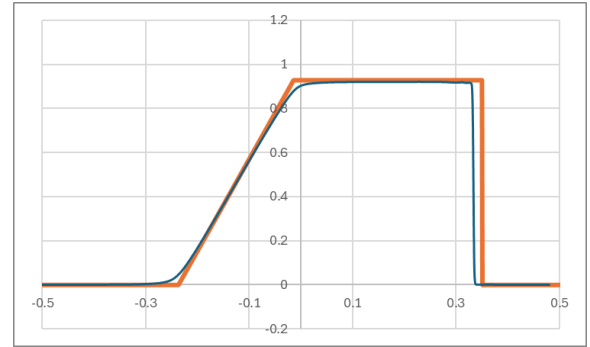
ここで、

$$\begin{aligned}M^{n-1} &= p^{n-1} I - \boldsymbol{\sigma}^{n-1} = \begin{bmatrix} p^{n-1} - \sigma_x^{n-1} & -\tau^{n-1} \\ -\tau^{n-1} & p^{n-1} - \sigma_y^{n-1} \end{bmatrix}, \\ \nabla \cdot \{T^n \nabla (a_p^n - a_p^n)\} \\ &= T^n [\{\nabla (a_p^n - a_p^n)\}^2 + \nabla \cdot \{\nabla (a_p^n - a_p^n)\}], \\ T^n &= \frac{p^n}{\rho^n} = \exp(a_p^n - a_p^n)\end{aligned}$$

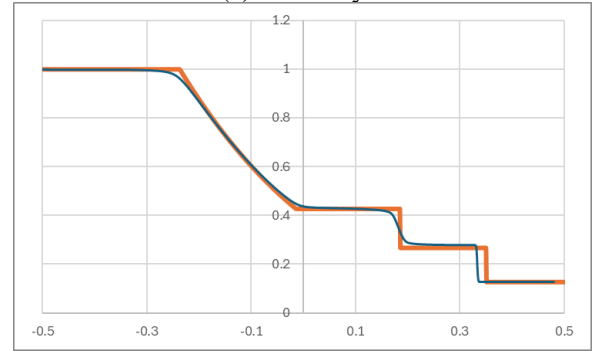
である。

#### 6. 数値計算結果：1D Sod Shock Tube Problem

圧縮性Euler方程式を計算し、1次元Sod Shock Tube Problemを解いた。まず初めに、最小のエッジサイズ $\Delta x$ を $5 \times 10^{-4}$ として、 $a_p, u, a_p$ の基底関数としてP1-P1-P1 (Fig.1), P1-P2-P1 (Fig.2), P2-P2-P2 (Fig.3)の3ケースの計算を行った。各図の橙色が $t = 0.2$ における厳密解、青色が数値解のプロファイルとなっている。Fig.1, Fig.2, Fig.3の結果から、P2-P2-P2が最も厳密解に近いプロファイルとなることが明らかとなった。

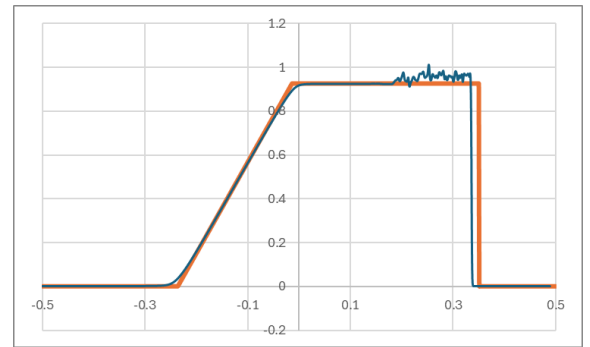


(a) Velocity.

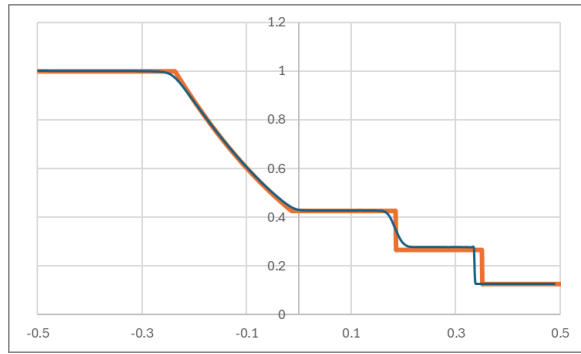


(b) Density.

Fig.1.  $a_p, u, a_p$  for P1-P1-P1.

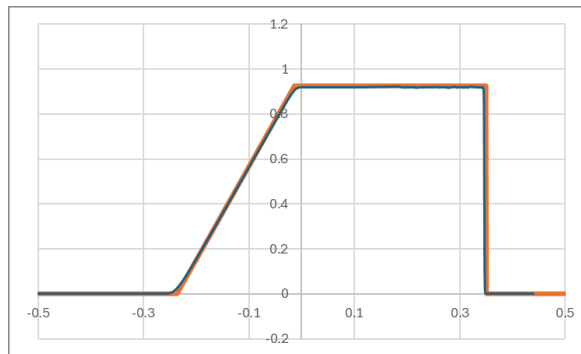


(a) Velocity.

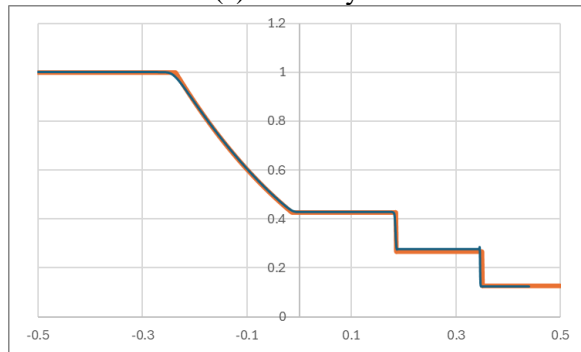


(a) Density.

Fig.2.  $a_\rho, u, a_p$  for P1-P2-P1.

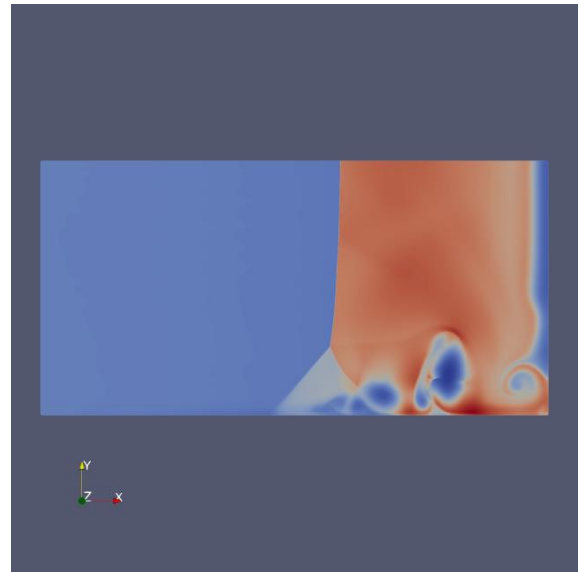


(a) Velocity.

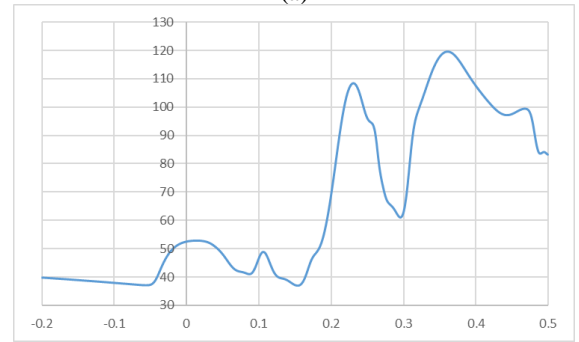


(b) Density.

Fig.3.  $a_\rho, u, a_p$  for P2-P2-P2.



(a)



(b)

Fig. 3. 時刻  $t = 1$  における (a) 密度分布と (b) 底面における密度プロファイル.

## 7. 数値計算結果：2D Sod Shock Tube Problem

最後に、圧縮性Navier-Stokes方程式を解き、2次元Sod Shock Tube Problemを解いた。その際、レイノルズ数  $Re$  は200として、その他のパラメーターは圧縮性Euler方程式を解いた時と同じものを用いた。その結果、先行研究と同様の密度分布が得られていることが分かった。