

2E05 物体非適合直交格子を用いた 高忠実流体解析における非定常空力評価法の検討

○大盛優太, 浅田啓幸, 河合成孝, 河合宗司 (東北大学)

Investigation of unsteady aerodynamic force evaluation methods on non-conforming Cartesian grids for high-fidelity flow simulations

Yuta Omori, Hiroyuki Asada, Shigetaka Kawai, Soshi Kawai (Tohoku University)

Key Words : Cartesian grids, Immersed boundary methods, Aerodynamic forces

Abstract

The evaluation method of aerodynamic forces acting on immersed boundaries is explored for high-fidelity unsteady large-eddy simulations. A flux-based method is considered to accurately evaluate the forces without any extrapolation of the physical quantities to the body surface. The unsteady term and numerical viscosity term, which have not been fully assessed, and the conservation error term, which is hardly quantified, are analyzed in the flux-based method. The analyses show that the unsteady term and numerical viscosity term have significant influences on the forces evaluated by the flux-based method when the turbulent region is included in the control volume. On the other hand, since the conservation error analysis is difficult for the non-linear and complex flow, the simplified case is considered which assumes that the flow is incompressible and the velocity profile is linear.

1 緒論

数値流体力学 (CFD) による流体シミュレーションとして広く利用されている Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) 解析は, 計算コストが低い反面, 計算結果が物理モデルや格子解像度に依存し信頼性に欠けることに加えて, 剥離を伴う現象など, 非定常現象を精度良く予測できないという欠点がある. そのため, 非定常乱流現象の高忠実な予測を可能とする large-eddy simulation (LES) による計算の需要が学術的にも産業的にも増加しており, なおかつ近年の計算機性能の向上や数値計算法の発展に伴い, 大規模な LES 計算が可能になってきている. 一方で, 複雑形状周りの解析に広く利用されている非構造格子には, 膨大な格子点数を要する高忠実な LES 計算をする上で格子生成プロセスに大きな課題が存在する. 非構造格子には数百億点規模の大規模な格子生成に多大な時間を要することや, 高精度の計算スキームの適用に課題があるため, 非構造格子に代わる新たな計算格子が求められている. そこで, 複雑形状に対しても格子生成が容易であり, 高次精度化も容易に行うことが可能な物体非適合直交格子を用いた数値計算が注目されている.

物体非適合直交格子は一般的に物体表面に格子点が存在しないため, 物体を表現するためにカットセル法 [1] や埋め込み境界法 [2] がよく用いられている. しかし, カットセル法は格子の変形や切断などの計算コストの高いプロセスを要する. 特に, 物体の移動を伴う計算においては毎ステップの格子の切断や変形が必要になるため, 多大な計算コストを要求するという問題点がある. 一方で埋め込み境界法はカットセル法のような煩雑な処理を必要とせず比較的容易に実装可能であることから, 計算コストを削減したシンプルな計算手法となっている. 実際に, Asada ら [3] は埋め込み境界法を用いた計算で航空機高揚力形態まわりの高レイノルズ数流れの LES 計算を実施し, 空力係数や主翼上面の剥離パターンが実験結果と良い一致を示す高精度な計算結果が得られている.

しかし埋め込み境界法による計算では, 物体適合格子の場合と異なり物体表面に格子点が存在しないことから, 物体表面の物理量を積分することで空力評価を行う従来手法は適用できず, 物体非適合直交格子を用いた場合での空力評価は自明ではない. これまで, 物体非適合直交格子を用いた CFD 計算における空力評価法として, 後流積分法 [4] や物体表面への物理量の

外挿を行うことで表面積分を行う手法 [5] など、いくつかの空力評価法が提案されてきた。しかし、物体表面の値を必要とせず、物体後流の物理量の積分のみで空力評価を行う後流積分法は、定常解析にのみ利用可能であり、非定常計算には用いることができないという問題点がある。また、Nonomura ら [5] は物体表面への物理量の外挿による空力評価法を検討しているが、外挿手法や格子間隔に依存して空力評価精度が大きく変化するため、物体表面への外挿による空力評価法には課題が残る。このように、物体非適合直交格子を用いた CFD 計算における非定常空力評価法は未だに構築されていない。

そこで本研究では、物体非適合直交格子を用いた場合の高精度な非定常空力評価法の構築を目的として、物理量の外挿を伴わない手法を検討し調査を行う。

2 解析対象と数値解析手法

2.1 計算条件

本研究では平板に生じる力を対象として CFD 計算を行う。計算対象は圧縮性平板乱流境界層として LES 解析を実施する。計算条件は一様流マッハ数を $Ma_\infty = 0.3$ 、流入境界層厚さに基づくレイノルズ数を $Re_\delta = 5100$ とした。計算領域の大きさは、流入境界層厚み δ に対して流れ方向に 15δ 、スパン方向に 3δ 、壁面高さ方向に 10δ としている。境界条件は、計算領域下面の壁面を非滑り壁、上面を一様流条件、スパン方向は周期境界条件、流入条件を $x = 12\delta$ における流れ場を rescale-reintroduction 法 [6] によってリスケールして与え、流出条件は物理量の一次外挿によって与えている。また、計算格子の格子解像度は壁面摩擦速度 u_τ と壁面動粘性係数 ν_w で無次元化された値で、主流方向に $\Delta x^+ \leq 10.0$ 、スパン方向に $\Delta z^+ \leq 5.0$ 、壁面垂直方向の 1 点目を $y_w^+ \leq 0.5$ としており、圧縮性平板乱流境界層の LES 計算として十分な格子解像度になっている。

2.2 支配方程式

支配方程式は、以下の圧縮性 Navier-Stokes 方程式である。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (F_{c,j} - F_{v,j})}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

ここで、 Q は保存変数、 $F_{c,j}$ は対流項の流束、 $F_{v,j}$ は粘性項の流束であり、それぞれの項は以下のように与

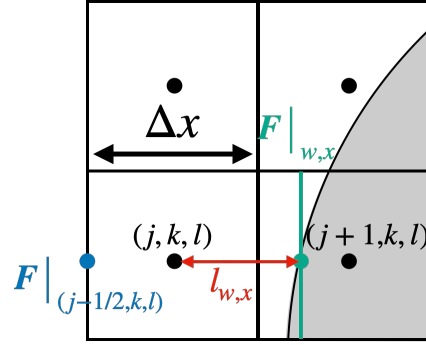


図 1: 不等間隔差分による離散化。

えられる。

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{bmatrix}, F_{c,j} = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_1 u_j + p \delta_{1j} \\ \rho u_2 u_j + p \delta_{2j} \\ \rho u_3 u_j + p \delta_{3j} \\ (e + p) u_j \end{bmatrix}, F_{v,j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ u_i \tau_{ij} - q_j \end{bmatrix}.$$

ここで、 ρ は密度、 u_i は速度の i 方向成分、 e は単位体積あたりの全エネルギー、 p は圧力、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 τ_{ij} は粘性応力テンソル、 q_j は熱流束である。また本研究では理想気体を仮定し、圧力は以下のように与えられる。

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{\rho}{2} u_i u_i \right). \quad (2)$$

ここで、 $\gamma = 1.4$ は比熱比である。

2.3 数値計算法

物体がないセルでは、式 (1) における x 方向の流束の微分は、セル境界面における数値流束 $F|_{(j\pm 1/2, k, l)}$ を用いて次のように離散化される。

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(j, k, l)} \approx \frac{F|_{(j+1/2, k, l)} - F|_{(j-1/2, k, l)}}{\Delta x}. \quad (3)$$

ここで、 Δx は格子間隔、 j, k, l はそれぞれ x, y, z 方向の格子点のインデックスを表す。

一方で物体が存在するセルにおいて、物体境界は二つの格子点の間に存在することから、境界条件は 2 つの格子点を結ぶ線と物体境界の交点に与えられる。図 1 に示すように (j, k, l) と $(j+1, k, l)$ の間に物体境界がある場合を考えると、壁面の境界条件を表す数値流束 $F|_{w,x}$ (壁面流束) を用いて、以下に示すような不等間隔差分により離散化を行うことで境界条件を与える。

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(j, k, l)} \approx \frac{F|_{w,x} - F|_{(j-1/2, k, l)}}{l_{w,x} + \frac{\Delta x}{2}}. \quad (4)$$

ここで、 $l_{w,x}$ は格子点 (j, k, l) と壁面の距離を表し、式

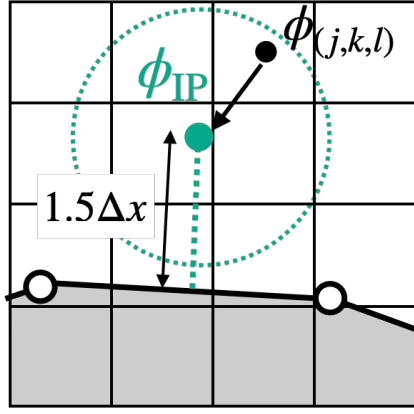


図 2: 逆距離荷重法による物理量の内挿。

(4) の右辺の分母は $\Delta x/2 \leq l_{w,x} + \Delta x/2 < 3\Delta x/2$ となる．そのため分母が 0 となることを防ぎつつ，クーラン数が極端に大きくなることも防ぐ手法となっている．

境界条件を表す対流項の数値流束 $\mathbf{F}|_{w,x}$ は，壁面上の物理量を用いて評価する．本研究では物体を非滑り壁及び断熱壁とし，壁面法線方向の圧力勾配を 0 とし境界条件を与える．また，粘性項の数値流束は熱流束に断熱条件として 0 を与え，粘性応力テンソルには壁面法線方向の速度勾配を用いて次のように計算を行う．

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \tau_w(n_i t_j + n_j t_i) \\ &= \mu \frac{\partial u_t}{\partial n} (n_i t_j + n_j t_i).\end{aligned}\quad (5)$$

ここで， μ は粘性係数， n_i と t_i はそれぞれ壁面垂直ベクトルと壁面接線ベクトルの成分， u_t は速度の壁面平行方向成分， $\frac{\partial}{\partial n}$ は壁面垂直方向微分を表している．壁面における密度や圧力，速度勾配は，図 2 に示すように壁面法線方向に image point (IP) を設定し，IP における物理量 ϕ を周囲の格子点の物理量から逆距離荷重法による内挿を行うことで計算する．壁面での密度及び圧力は勾配を 0 とした境界条件を与えているため，IP における値をそのまま用い，速度勾配は非滑り壁の条件から以下に示すような式で与えられる．

$$\frac{\partial u_t}{\partial n} = \frac{u_{IP}}{1.5\Delta x}\quad (6)$$

ここで， u_{IP} は IP における壁面平行方向の速度を表している．

CFD における空間離散化は対流項に対し 2 次精度 KEEP スキーム [7]，粘性項に 2 次精度中心差分を用い，時間積分には 3 段 3 次の TVD Runge-Kutta 法 [8]

を用いる．また，高周波成分による数値振動を防ぐため，8 次精度コンパクトフィルター [9] を用いて計算を行う．

2.4 流束積分法

本研究では，Navier-Stokes 方程式の運動量の保存則に基づく空力評価法に着目する．埋め込み境界法を用いた CFD における運動量保存則の i 方向成分は以下のように表せる．

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i + \beta_{\text{error}}.\quad (7)$$

ここで， f_i は物体が存在することで流体にかかる力であり， β_{error} は埋め込み境界法による計算で生じる運動量の保存誤差を表している．また，CFD では計算安定化のために数値粘性を加えて計算を行う場合があり，以下のように運動量の保存則の式に加えることができる．

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i + \alpha_{\text{visc}} + \beta_{\text{error}}.\quad (8)$$

ここで， α_{visc} は数値粘性による項を表す．埋め込み境界法を用いた CFD 計算において，式 (8) が運動量の支配方程式を表している．ここで式 (8) を任意の検査体積 V で体積分を行うと以下ようになる．

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV &= -\int_V \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} dV - \int_V \frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_j} dV \\ &+ \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V f_i dV + \int_V \alpha_{\text{visc}} dV + \int_V \beta_{\text{error}} dV.\end{aligned}\quad (9)$$

ここで，物体に生じる力 F_i は流体が及ぼす力の反作用であると考えることができるため，

$$F_i = -\int_V f_i dV.$$

と表すことができる．そのため，運動量の保存則に基づく空力評価法は以下のように表せる．

$$\begin{aligned}F_i &= -\int_V \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV - \int_V \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} dV - \int_V \frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_j} dV \\ &+ \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \alpha_{\text{visc}} dV + \int_V \beta_{\text{error}} dV.\end{aligned}\quad (10)$$

また，式 (10) の空間微分を含む項は，ガウスの発散定理により以下のように面積積分の形式に変形すること

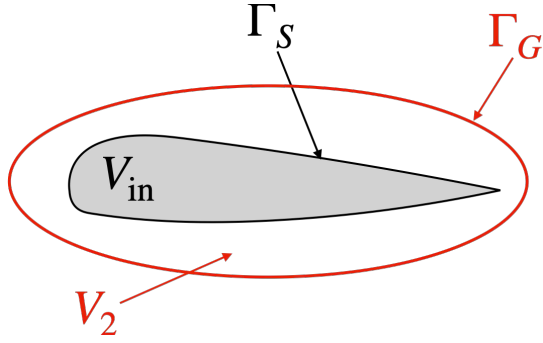


図 3: 検査体積の選び方.

ができる.

$$F_i = - \int_V \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV - \int_S \rho u_i u_j n_j dS - \int_S p \delta_{ij} n_j dS + \int_S \tau_{ij} n_j dS + \int_V \alpha_{\text{visc}} dV + \int_V \beta_{\text{error}} dV. \quad (11)$$

ここで \$S\$ は閉曲面の面積, \$n_i\$ は閉曲面外向き法線ベクトルを表している.

空力評価は検査体積の選び方によって計算方法が異なる. 図3に示すように, 物体表面に沿った検査体積を選ぶ表面積分法と, 物体を覆うような検査体積を選ぶ流束積分法が存在する. 表面積分法では閉曲面が物体表面と一致し, 物体内部の流体変数の時間変化がないことから, 空力評価法は次のように表せる.

$$F_i = - \int_{\Gamma_S} p \delta_{ij} n_j dS + \int_{\Gamma_S} \tau_{ij} n_j dS. \quad (12)$$

ここで, \$\Gamma_S\$ は物体の表面積である. 式 (12) は圧力と粘性応力の表面積分で物体に生じる力を求める手法であり, 従来の物体適合格子で用いられてきた空力評価法である. しかし, 物体表面に格子点が存在しない埋め込み境界法による計算では, 表面積分法で計算するためには物理量の外挿が必要となるため, この手法による計算には課題が残る. そこで, 検査体積の閉曲面を物体から離れた位置に設定する流束積分法を考える. 流束積分法では閉曲面が物体表面と一致しないことから, 空力評価法は次のように表せる.

$$F_i = - \int_{V_2} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV - \int_{\Gamma_G} \rho u_i u_j n_j dS - \int_{\Gamma_G} p \delta_{ij} n_j dS + \int_{\Gamma_G} \tau_{ij} n_j dS + \int_{V_2} \alpha_{\text{visc}} dV + \int_{V_2} \beta_{\text{error}} dV. \quad (13)$$

ここで \$V_2\$ は検査体積の体積, \$\Gamma_G\$ は閉曲面の面積を表す. 式 (13) より, 流束積分法では空力評価に式 (11) の全ての項の評価が必要となることがわかる. 埋め込

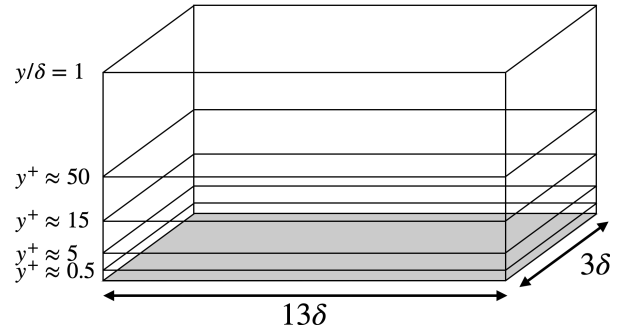


図 4: 平板乱流境界層に適用した流束積分法で用いた検査体積.

み境界法を用いた CFD 計算において保存誤差項を除く全ての項は厳密に評価可能であるため, 流束積分法による高精度な空力評価のためには保存誤差項を適切にモデル化して空力評価に組み込む必要がある. また, 検査体積を物体近傍に設定することで非定常項及び数値粘性項が無視できると言及されている文献もあるが [10], 流束積分法における検査体積の設定方法とこれらの項の影響の関係性については定量的に評価されておらず, 詳細な理解は得られていない. したがって, 高精度空力評価法の構築には非定常項と数値粘性項の定量的評価も必要である.

3 流束積分法による空力評価

本研究ではまず, 保存誤差項以外の影響を評価するために, 保存誤差が生じない物体適合格子による計算に対して空力評価を行う. 図4に示すように主流方向に \$13\delta\$, スパン方向 \$3\delta\$ を底面とし, 壁面垂直方向に高さ \$y^+ \approx 0.5, 5\$ (境界層内層: 粘性の影響が支配的で, 乱流変動が小さい領域), \$y^+ \approx 15, 50\$ (境界層外層: 乱流変動が大きい領域), \$y/\delta = 1\$ (境界層厚さ) の5つの直方体領域を検査体積として流束積分法を適用し, 平板乱流境界層における平板に生じる力を計算する. また, 参照解として表面積分法による計算も行う. まず, 全ての項を計算した場合の流束積分法による計算精度を検証するために, 表面積分法及び流束積分法による平板に対する空力評価の結果を図5に示す. 上段には壁面垂直方向の力, 下段には主流方向の力を示しており, 横軸は時間 \$t\$ を一様流速と流入境界層厚さで無次元化した値を示している. ここで, \$C_x, C_y\$ はそれぞれ \$x, y\$ 方向の力を \$\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 S\$ で無次元化した値を示している. また, \$\rho_\infty\$ は一様流密度, \$u_\infty\$ は一様流速, \$S\$ は検査体積に囲まれる物体の面積を表している. 図5から, 表面積分法と比較して流束積分法にお

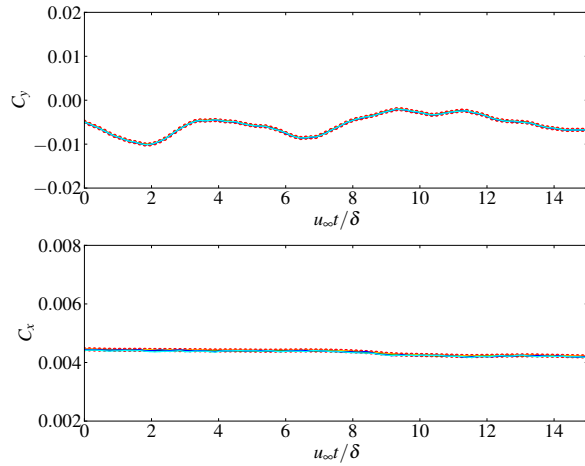


図 5: 表面積分法 (赤シンボル: 表面積分法) と流束積分法 ([検査体積の壁面垂直方向高さ] 橙: $y^+ \approx 0.5$, 黄: $y^+ \approx 5$, 緑: $y^+ \approx 15$, 青: $y^+ \approx 50$, 水色: $y/\delta = 1$) による平板に対する空力評価。

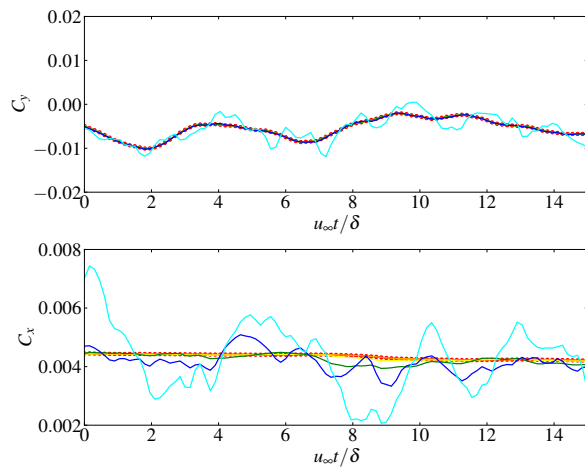


図 6: 非定常項と数値粘性項を無視した場合における流束積分法による空力評価 ([検査体積の壁面垂直方向高さ] 橙: $y^+ \approx 0.5$, 黄: $y^+ \approx 5$, 緑: $y^+ \approx 15$, 青: $y^+ \approx 50$, 水色: $y/\delta = 1$). 参照解として表面積分法による空力評価の結果を示している (赤シンボル).

いても精度良く平板に生じる力を計算できていることが確認できる。次に非定常項と数値粘性項を無視した場合の空力評価の結果を図 6 に示す。図 6 から、非定常項と数値粘性項を無視した場合、検査体積の高さを乱流変動が支配的な領域 $y^+ \approx 15, 50$, $y/\delta = 1$ に設定した場合に誤差が増大し、加えて、物体から離れて高さが大きくなると誤差が大きくなっていることが読み取れる。一方で粘性の影響が支配的な領域である $y^+ \approx 0.5, 5$ の領域では、誤差がほとんど確認できない

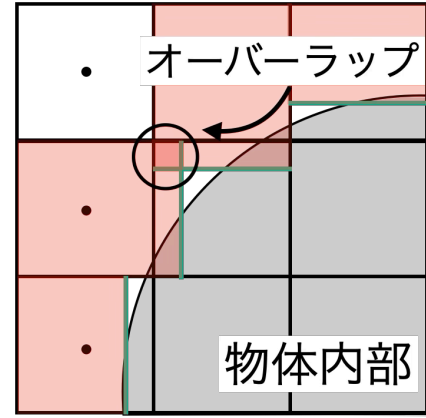


図 7: セル同士のオーバーラップ。

結果となった。以上より、検査体積の高さを乱流変動の支配的な領域に設定した場合には非定常項及び数値粘性項の影響が増大し、高精度な空力評価のためにはこれらの項を流束積分法に適切に加える必要があることが確認できる。この結果は特に、境界層内層を解像せず壁面から 1 点目が乱流変動の支配的な領域に存在する壁面モデル LES [11] を用いた計算において、流束積分法を用いた場合に非定常項と数値粘性項を適切に評価して計算を行う必要があることを示している。

4 保存誤差解析

本研究で用いる埋め込み境界法では (4) 式に示すような不等間隔差分による離散化を行う。不等間隔差分による定式化では、図 7 に示すようにセル体積が伸縮していると考えることができ、隣接するセルとのオーバーラップが生じる。セルのオーバーラップに起因して数値流束の収支を評価することが困難となり、有限体積法の観点からの保存誤差の定量的な評価が困難となる。そこで、不等間隔差分を等価な式変形で等間隔差分に変形することで、有限体積法の観点から保存誤差の定量的な評価を可能にする [10]。等間隔差分に変形するために、等間隔の場合の通常のセル境界の数値流束を壁面流束を用いて以下のように定義する。

$$F'_{(j+1/2,k,l)} = \frac{\Delta x F|_{w,x} + \left(l_{w,x} - \frac{\Delta x}{2}\right) F|_{(j-1/2,k,l)}}{l_{w,x} + \frac{\Delta x}{2}}. \quad (14)$$

式 (14) の数値流束を用いることで、不等間隔差分による定式化である式 (4) を以下のように等間隔差分に変

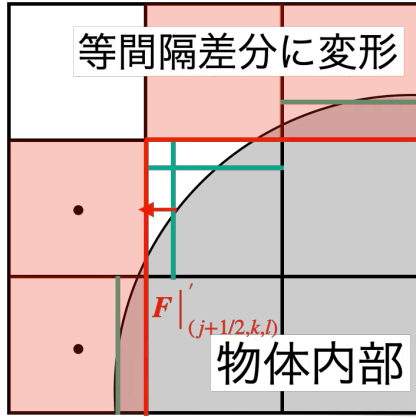


図 8: 等間隔差分への変形.

形できる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(j,k,l)} &\approx \frac{F|_{w,x} - F|_{(j-1/2,k,l)}}{l_{w,x} + \frac{\Delta x}{2}} \\ &= \frac{F'_{(j+1/2,k,l)} - F|_{(j-1/2,k,l)}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (15)$$

式 (15) に変形することにより，図 8 に示すように隣接するセルの数値流束の収支が一致し，セル同士のオーバーラップを避けることができるため，式 (15) による定式化では計算上の保存誤差は 0 であると考えることができる．したがって，境界条件の与え方，すなわち壁面における数値流束の与え方に起因した保存誤差が存在していると考えることができる．そこで本研究ではまず線形速度分布を仮定した定常非圧縮性流体を考え，単純化した系における保存誤差を定量的に評価する．これによって得られた単純な系での保存誤差を基に，非定常圧縮性流体における保存誤差のモデル化に展開することを試みる．本研究では図 9 に示すように，最も単純化した系として平板を考え，流体と固体の境界面と物体表面に囲まれた領域における保存則を考えることで，式 (4) で物体を表現した場合の保存誤差を定量的に評価する．保存誤差解析の結果については口頭発表にて報告する．

5 結論

本研究では高忠実な非定常空力評価法の構築を目指し，運動量保存則に基づく流束積分法に着目し，非定常項や数値粘性項の評価及び埋め込み境界法を用いた場合における保存誤差の定量的評価を試みた．その結果，非定常項や数値粘性項は閉曲面を乱流変動が大きい領域に設定した場合に無視できない影響を及ぼすことが確認できた．したがって，壁面モデル LES によ

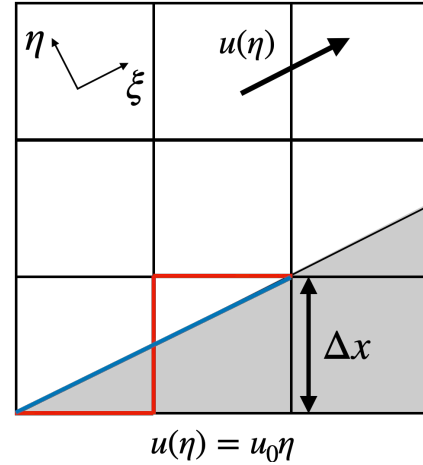


図 9: 本研究で行う保存誤差解析の問題設定．赤線で示す境界面と青線で示す物体境界に囲まれる領域の保存則を考えることで，保存誤差解析を行う．壁面垂直方向の座標を η とし，線形速度分布 $u(\eta) = u_0 \eta$ を仮定する．ここで， u_0 は速度勾配であり定数とする．

る計算など，流束積分法を用いた場合に乱流変動が大きい領域に閉曲面を設定する必要がある場合に，非定常項と数値粘性項を適切に評価する必要があることがわかった．今後は，閉曲面位置と非定常項・数値粘性項の関係性を定量的に評価することで，流束積分法の適用時における積分面の設定の指標を構築することを目指す．また保存誤差に関しては，単純化した系における保存誤差を定量的に解析し，保存誤差の発生条件などを導出することで，埋め込み境界法を用いた非定常圧縮性 LES 解析における流束積分法の保存誤差項のモデル化を目指す．

謝辞

本研究は，文部科学省「富岳」成果創出加速プログラム「航空機デジタルフライトが拓く機体開発 DX に向けた実証研究」（課題番号: JPMXP1020230320）の一環として実施されたものです．

参考文献

- [1] Fotis Sotiropoulos and Xiaolei Yang. Immersed boundary methods for simulating fluid–structure interaction. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 65, pp. 1–21, 2014.
- [2] Rajat Mittal and Gianluca Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 37, No. Volume 37, 2005, pp. 239–261, 2005.

- [3] Hiroyuki Asada, Yoshiharu Tamaki, Ryoji Takaki, Takaaki Yumitori, Shun Tamura, Keita Hatanaka, Kazuhiro Imai, Hirotaka Maeyama, and Soshi Kawai. FVHC-ACE: Fully automated cartesian-grid-based solver for compressible large-eddy simulation. *AIAA Journal*, Vol. 61, No. 8, pp. 3466–3484, 2023.
- [4] Michael B. Giles and Russell M. Cummings. Wake integration for three-dimensional flowfield computations: Theoretical development. *Journal of Aircraft*, Vol. 36, No. 2, pp. 357–365, 1999.
- [5] Taku Nonomura and Junya Onishi. A comparative study on evaluation methods of fluid forces on cartesian grids. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2017, No. 1, p. 8314615, 2017.
- [6] Gerald Urbin and Doyle Knight. Large-eddy simulation of a supersonic boundary layer using an unstructured grid. *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 7, pp. 1288–1295, 2001.
- [7] Yuichi Kuya, Kosuke Totani, and Soshi Kawai. Kinetic energy and entropy preserving schemes for compressible flows by split convective forms. *Journal of Computational Physics*, Vol. 375, pp. 823–853, 2018.
- [8] Sigal Gottlieb and Chi-Wang Shu. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Math. Comput.*, Vol. 67, No. 221, p. 73–85, January 1998.
- [9] Datta V. Gaitonde and Miguel R. Visbal. Pade-type higher-order boundary filters for the navier-stokes equations. *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 11, pp. 2103–2112, 2000.
- [10] Yoshiharu Tamaki and Soshi Kawai. Wall modeling for large-eddy simulation on non-body-conforming cartesian grids. *Phys. Rev. Fluids*, Vol. 6, p. 114603, Nov 2021.
- [11] Soshi Kawai and Johan Larsson. Wall-modeling in large eddy simulation: Length scales, grid resolution, and accuracy. *Physics of Fluids*, Vol. 24, No. 1, p. 015105, 01 2012.