

2A06 高速輸送機の空力最適化に向けた モード分解を用いたサロゲートモデル開発

○高橋俊(JAXA), 永田貴之(名古屋大学), 谷香一郎(JAXA), 古賀勝(JAXA),
磯野達志(JAXA), 竹腰正雄(JAXA)

Development of a surrogate model based on mode decomposition for aerodynamic optimization of high-speed
transport vehicles

Shun Takahashi(JAXA), Takayuki Nagata(Nagoya Univ.) Kouichiro Tani(JAXA), Masaru Koga(JAXA),
Tatsushi Isono(JAXA), Masao Takegoshi(JAXA)

Key Words : CFD, Hypersonic Flow, Mode Decomposition

Abstract

To achieve the final goal of aerodynamic optimization of high-speed vehicles, we constructed a surrogate model by applying mode decomposition to both the level set function of the vehicle shape and the aerodynamic coefficients obtained from CFD analysis. The results of validating the prediction accuracy of the model demonstrated that the proposed method in this study can determine various types of vehicle shapes based on aerodynamic coefficients. On the other hand, it was also confirmed that errors tend to increase when there is little learning data surrounding the estimated values. As a future task, it will be necessary to consider indicators that show the extent to which the estimated values are based on learning data.

1. はじめに

空気力学的性能を第一に考えなくてはならない航空機を筆頭に、近年では様々な工業製品に対して、数値流体力学(CFD)を応用した流体性能の最適化が一般的なツールとして使われつつある。これまでは、逆問題設計法を用いた超音速機の翼設計[1]から、遺伝的アルゴリズムによる空力最適設計[2, 3, 4]、遺伝的アルゴリズムによる商用航空機の空力最適設計[5]などが示されてきたが、最近では固有直交分解 (POD) による極超音速機への応用例[6, 7, 8]など、計算機性能の向上と機械学習の研究の進展により、最適化の手法も様々な広がりを見せている。航空機以外でも自動車に対するニューラルネットワークを用いた空力予測[9]や空力最適化[10]などの先行研究事例があり、CFDに基づく最適化の取り組みはさらなる応用研究がなされると予想される。

このような複雑な設計問題において、近年着目されているのが、低次元化、次元削減、リダクションモデル、Reduced Order Model (ROM) である。これらは広義で「高速・高精度に問題解決を行うための高コスト・複雑な式／理論モデル／計算手法を低コスト・簡略化する方法」を意味するが、その具体的な手法と対象は様々である。一例としては、3次元的な時空間分布を近似的に表現する空間次元の削減[11]、所望の現象のみに着目するように多数の化学反応のモデル

式を減らすモデル式の削減[12]、密な格子の情報を粗い格子で表現する自由度の削減、センサー位置の最適化・最小化[13]、など様々である。近年ではこれらの低次元化を機械学習で行うことも多くなってきた。新たな条件での性能や解を低コストに求めることを目的として、前述のPODや、ニューラルネットワークなどの学習器に、設計空間内で得られた多数の学習データを入力して特徴量を学習させる。

CFDを用いた設計や最適化では、問題全体の中でCFDの大きな計算コストがボトルネックになるため、CFDを何らかの方法で低次元化することが効果的で、そのように構築されたモデルはサロゲート（代替）モデルと呼ばれる。近年はCFDの解として得られた速度場や圧力場を学習データに用いてサロゲートモデルを構築することが広く行われている。この手法は流れ場を再構築するため、流れ場に由来する諸量、例えば表面圧力や摩擦力、流れ場中の渦度分布など、様々な物理量を評価でき、非常に有効な手法である。しかしながら学習データの容量と計算負荷が大きいいため、近似可能な変域と、その精度について注意を払う必要がある。

高速輸送機の中でも、本研究で扱う空気吸入式 (Air-Breathing) 極超音速機を設計開発するためには、多分野で複合的に生じる課題をクリアしなければならない。具体的には、エンジン・空力性能の両立、必

要燃料搭載のための構造効率・体積・重量の満足、制御性の確保、耐空力加熱性の実現などが一例である。これらを効率的に設計するため、従来から多分野連成解析・設計法が開発、応用されてきた[14, 15, 16]。さらに必要な機体性能はミッションにより異なり、巡航ミッションには巡航時のエンジン性能最大化と抗力最小化が、加速ミッションには揚抗比向上と抗力最小化が求められる[17]。これら多くの条件を満足する機体を効率的に設計開発するにはサロゲートモデルの応用が不可欠で、既に一部にサロゲートモデルを用いた設計の研究も報告されている[7, 8]。それに関連し、翼型、翼形状を基底関数を用いて表現して特異値分解と組み合わせて空力形状の最適化を試行している研究は既になされており一定の成果を見せている[6, 18]が、この方法では翼型以外の形状の表現に疑問が残る。このような背景から本研究では、高速輸送機の空力最適化を最終目的に、CFDの解析対象である機体形状のレベルセット関数（符号付き距離関数）と、CFDの解析結果として得られた空力係数の両者に対して特異値分解によるモード分解を適用し、両者のサロゲートモデル化を行ってその予測精度の検証を行う。またそれらのサロゲートモデルを用いて空力性能が向上する機体形状の提案が可能かどうかの検討を行う。

2. 研究手法

2. 1. 機体形状の低次元化

本研究では機体形状を表現する際に等間隔直交格子上で定義したレベルセット関数(Level-set function: LSF)を用い、このデータを学習と予測に用いる。LSFは符号付き距離関数(Signed-distance function: SDF)とも呼ばれ、各位置から境界までの最短距離の値に符号をつけた数値である。LSF/SDFは解析的な関数や多数の三角形の集合体から成るSTL（Stereolithography）形式のファイル等に基づいて境界面の周辺の空間上の各位置で定義される。複雑な相界面が存在する混相流CFDの分野[19, 20, 21, 22, 23]や、複雑な境界形状から成る解剖学の分野[24]等で用いられる。本研究では次の①～④の手順でLSFを定義する。①STLファイルを覆う等間隔直交格子を定義し、②STLファイルに含まれる各三角形と直交格子セルの各辺と各面に対してTomasの交差判定法[25]を行って各セル中心から境界までの距離計算を行う。そして③境界の内側／外側が既知のセルから徐々に内外判定を行って、境界の内側は負の値、外側は正の値のように符号を定義する。これにより④境界面がゼロの等値面で表現されたLSFが完成する。図1は灰色の点線の境界からセル幅1の等間隔セルにおいて、各セル中心位置で求めたLSFの値を示している。

図1左は紙面左右方向のセル界面と境界が一致している場合、図1右は行列で言う対角成分に該当するセル中心の上に境界が斜め45degに配置された場合のLSFの値を示している。ここでは紙面上で境界の左側を内側、右側を外側と仮定し、それぞれの領域のLSFを負値と正值と定義している。LSFを用いると、このように任意の境界を空間中に分布するスカラー量の集合として表現することができる。図2は今回の学習に用いた機体のLSFの一例で、中央に位置する灰色の形状がLSFがゼロの等値面である。

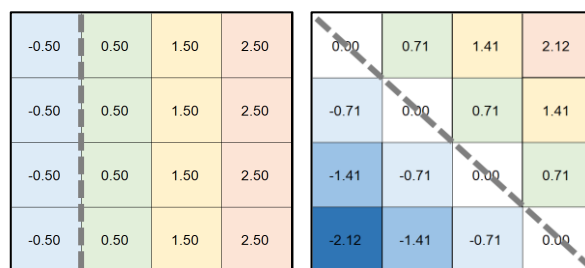


図1 LSFの例

（左：垂直な境界線、右：斜めの境界線）

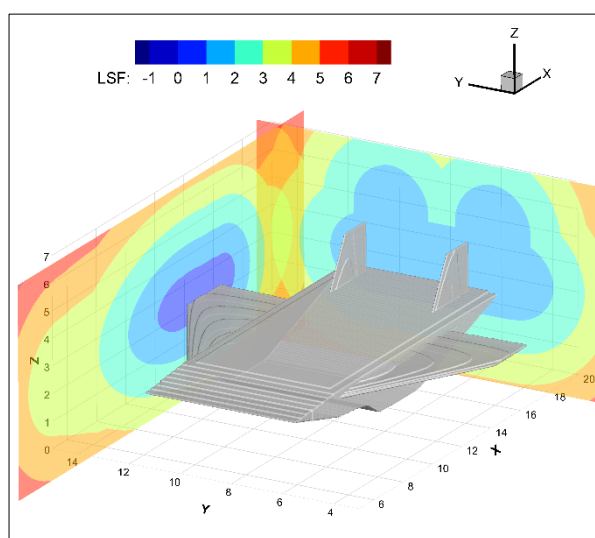


図2 学習に用いるLSFの例

これらのことから、任意の境界は全格子点(1～IMAX, 1～JMAX, 1～KMAX)のLSFを用いて式(1)のように表せる。

$$\phi = (\phi_{1,1,1} \ \phi_{2,1,1} \ \cdots \ \phi_{IMAX,1,1} \ \cdots \ \phi_{IMAX,JMAX,KMAX})^T \quad (1)$$

ここで式(1)の下付き文字は空間中の格子点のインデックスを表す。本研究ではCFD解析対象のN機体のLSFを生成し、それら全てを学習データに用いる。これを \mathbf{X}_ϕ とすると、式(2)で表せる。

$$\mathbf{X}_\phi = (\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_N) \quad (2)$$

ここで式(2)の右辺の下付き文字は機体の番号を表す。 \mathbf{X}_ϕ に式(3)のように特異値分解を適用して形状の空間モードを抽出する。

$$\mathbf{X}_\phi = \mathbf{U}_\phi \mathbf{S}_\phi \mathbf{V}_\phi \quad (3)$$

これにより、空間モード行列 \mathbf{U}_ϕ 、振幅 \mathbf{S}_ϕ 、機体毎の変化の差分のモード行列 \mathbf{V}_ϕ が得られる。ここで全ての空間モードのうち、主要なモードのみを抜き出した低次元空間モード行列 $\tilde{\mathbf{U}}_\phi$ を元のモード行列 \mathbf{U}_ϕ の代わりに用い、対応する振幅 $\tilde{\mathbf{S}}_\phi$ 、行列 $\tilde{\mathbf{V}}_\phi$ を乗じたモード係数 $\tilde{\mathbf{Z}}_\phi (= \tilde{\mathbf{S}}_\phi \tilde{\mathbf{V}}_\phi)$ を用いて式(4)のように低次元モデルを構築する。

$$\mathbf{X}_\phi = \tilde{\mathbf{U}}_\phi \tilde{\mathbf{Z}}_\phi \quad (4)$$

2. 2. 空力係数の低次元化

本研究の最終目的である高速輸送機の空力設計では、亜音速から極超音速までの広い速度域でエンジン性能に見合う機体の空力設計を行うため、多数の条件で空力係数を評価する。本研究ではMach数を6条件（ $M_1=0.3$ 、 $M_2=0.8$ 、 $M_3=1.1$ 、 $M_4=2.0$ 、 $M_5=4.0$ 、 $M_6=6.0$ ）、迎角を9条件（ $\alpha_1=-10$ 、 $\alpha_2=-6.0$ 、 $\alpha_3=-2.0$ 、 $\alpha_4=2.0$ 、 $\alpha_5=6.0$ 、 $\alpha_6=10$ 、 $\alpha_7=14$ 、 $\alpha_8=18$ 、 $\alpha_9=22\text{deg}$ ）設定して、合計54条件を評価に用いる。

空力解析はJAXA航空技術部門で開発されたFaSTARによるEuler解析を用い、代表的な形状に対して格子収束性は確認済みである[26]。評価する空力係数は揚力係数CL、抗力係数CD、ピッチングモーメント係数CMで、今回は重心位置は前縁から50%の位置に固定している。54条件に対して3つの係数を考慮することから、一つの機体に対して162個定義される空力係数を低次元化する。図3は代表的な形状のCLとCDを2次元上平面上にカラーマップで示した図である。

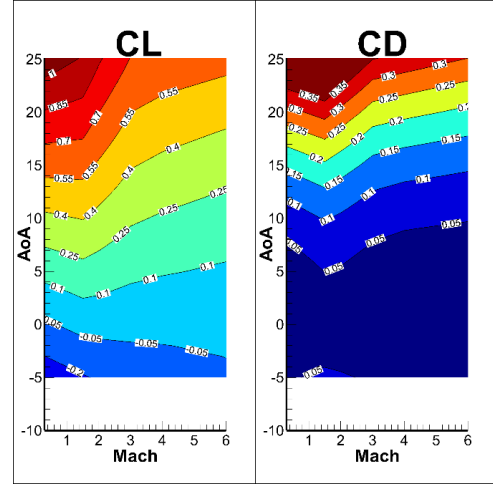


図3 学習に用いる空力係数マップの例

本研究で扱う空力係数をまとめて C_{Fj} （ $j=1$ はCD、 $j=2$ はCL、 $j=3$ はCMを表す）と記す。例えば $j=1$ のCDにおける、あるMach数における迎角9条件の値はまとめて式(5)のように表せる。

$$\mathbf{CD}_{Mi} = (CD_{\alpha_1, Mi} \ CD_{\alpha_2, Mi} \ \cdots \ CD_{\alpha_9, Mi}) \quad (5)$$

さらにこの \mathbf{CD}_{Mi} をMach数の6条件だけ並べたベクトルCDを式(6)のように定義する。これが1つの機体の全ての条件におけるCD（ $=C_{F1}$ ）である。

$$\mathbf{C}_{F1} = \mathbf{CD} = (\mathbf{CD}_{M1} \ \mathbf{CD}_{M2} \ \cdots \ \mathbf{CD}_{M6})^T \quad (6)$$

本研究で学習データに用いるN機体のCDを行列 \mathbf{X}_{CD} （ $=\mathbf{X}_{CF1}$ ）として式(7)で表す。

$$\mathbf{X}_{CF1} = \mathbf{X}_{CD} = (\mathbf{CD}_1 \ \mathbf{CD}_2 \ \cdots \ \mathbf{CD}_N) \quad (7)$$

ここで式(7)の右辺の下付き文字は機体の番号を表す。この \mathbf{X}_{CD} に式(3)-(4)と同様に特異値分解を適用して空力係数のモードを抽出して低次元のモード行列 $\tilde{\mathbf{U}}_{CD}$ を作成し、モード係数 $\tilde{\mathbf{Z}}_{CD}$ を用いて式(8)のように表す。これにより機体のCDの低次元モデルを構築する。

$$\mathbf{X}_{CD} = \tilde{\mathbf{U}}_{CD} \tilde{\mathbf{Z}}_{CD} \quad (8)$$

また揚力係数（ $CL=C_{F2}$ ）とピッチングモーメント係数（ $CM=C_{F3}$ ）に対しても同様の手順で低次元モデルを構築する。

2. 3. 機体形状と空力係数のモード係数の回帰

機体形状を表すLSFのモード係数行列 \mathbf{Z}_ϕ と空力係数のモード係数行列 \mathbf{Z}_{CFj} の間で回帰分析により関数 $f_{C\phi}(Z_\phi)$ 、 $f_{\phi C}(Z_{CFj})$ を構築して、一方からもう片方の推

定が出来るサロゲートモデルを構築する。式(9)と(10)がそれぞれ、機体形状から空力係数、また逆に空力係数から機体形状のモード係数を求める際の回帰式である。

$$\bar{\mathbf{z}}_{CFj} = f_{CFj\phi}(\bar{\mathbf{z}}_{\phi}) \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_{CFj} = f_{\phi CFj}(\bar{\mathbf{z}}_{CFj}) \quad (10)$$

本研究では最小二乗回帰分析にガウス過程回帰(Gaussian Process Regression: GPR)を用い、カーネル関数には二乗指数カーネルを用いた。

2. 4. 推定

本研究では、機体形状から空力係数を、また逆に空力係数から機体形状を推定する。まず特定の機体形状のLSFである \mathbf{x}_{ϕ} から空力係数を推定する際は、式(11)のように低次元化したLSFのモード行列の転置行列 \mathbf{U}^T_{ϕ} を用いてLSFのモード係数 \mathbf{z}_{ϕ} を求める。ここでは \mathbf{U}_{ϕ} がユニタリ行列のため \mathbf{U}^T_{ϕ} が \mathbf{U}_{ϕ} の疑似逆行列に一致する性質を利用している。

$$\bar{\mathbf{z}}_{\phi} = \bar{\mathbf{U}}^T_{\phi} \bar{\mathbf{x}}_{\phi} \quad (11)$$

次にガウス過程回帰モデルを用いて対応する空力係数のモード係数を式(12)によって求める。

$$\bar{\mathbf{z}}_{CFj} = f_{CFj\phi}(\bar{\mathbf{z}}_{\phi}) \quad (12)$$

最後に空力係数の低次元モード行列 \mathbf{U}_{CFj} を用いた式(13)によって空力係数を求める。

$$\bar{\mathbf{x}}_{CFj} = \bar{\mathbf{U}}_{CFj} \bar{\mathbf{z}}_{CFj} \quad (13)$$

逆に特定の空力係数 \mathbf{x}_{CFj} から機体のLSFを推定する際は、式(11)～(13)の手続きを逆にした式(14)～(16)の手続きを行って機体のLSFである \mathbf{x}_{ϕ} を求める。

$$\bar{\mathbf{z}}_{CFj} = \bar{\mathbf{U}}^T_{CFj} \bar{\mathbf{x}}_{CFj} \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_{\phi} = f_{\phi CFj}(\bar{\mathbf{z}}_{CFj}) \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{\phi} = \bar{\mathbf{U}}_{\phi} \bar{\mathbf{z}}_{\phi} \quad (16)$$

なお、本研究における低次元モデルは上位25モードを用いて構築した。

3. 研究結果

3. 1. 学習データセット

本研究では本手法の適用性を検証するため、学習用データセットとして機体形状を変化させた32形状を作成して、LSFの生成とFaSTARによる空力解析により空力係数マップを得た。図4は学習用の一部の機体形状を示しており、胴体幅、ノーズの長さ高さ、エンジン取り付け位置、主翼面積などが変化している。

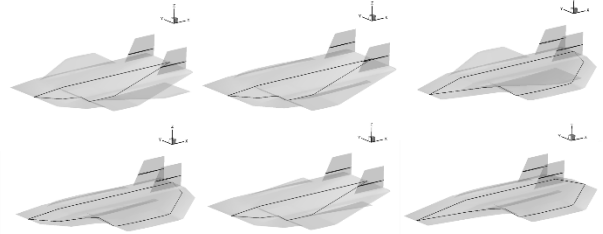


図4 学習に用いた機体形状の例

本研究でモード分解を適用する機体形状は薄い翼形状を有しており、そのような機体のLSFは表面近くで分布が滑らかでなくなる場合がある。そこで本研究では生成したLSFに対してLaplacian平滑化を適用して、分布を滑らかにしたLSFを学習データに用いた。以下の推定結果では、32機体のうち31機体を学習データに用いて、残りの1機体の形状と空力係数を推定した結果について考察する。

3. 2. 良好な推定結果の空力係数と機体形状

前述の通り31機の機体形状に対して生成したLSFと空力係数マップを学習データとし、それぞれをモード分解して両者のモード係数の回帰も作成した後に、残る1機のLSFを入力して式(11)～(13)の手順に従って該当する機体の空力係数を推定する。また回帰についてはLSEとGPRの二者の比較を行ったが、LSEは同じグラフや可視化上に描くことが難しいほど外れた値を推定する結果も多かった。そのためここではGPRの結果のみを載せている。以下の空力係数のグラフでは○印がFaSTARのCFD解析から得られた真値、□印がGPRによる推定値、青・赤・緑の線がそれぞれCL、CD、CMである。

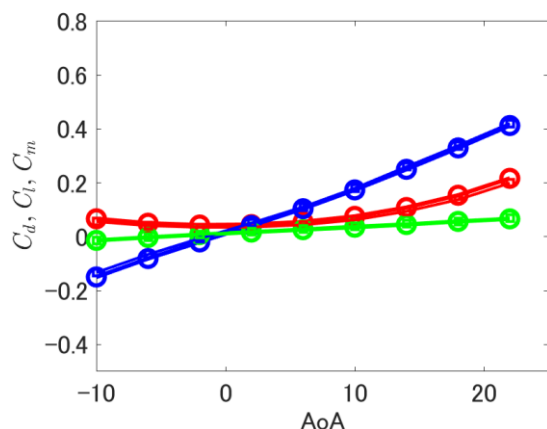


図5 機体079のM=0.3の空力係数

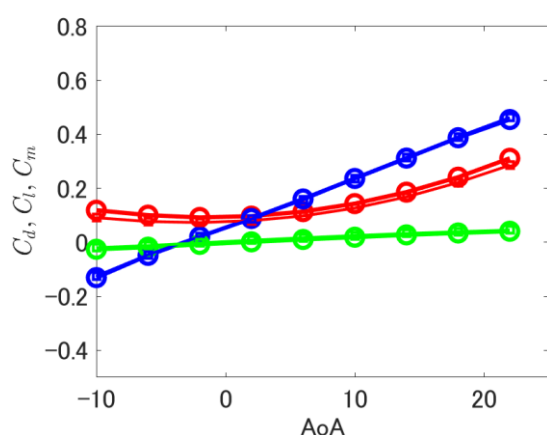


図6 機体079のM=1.1の空力係数

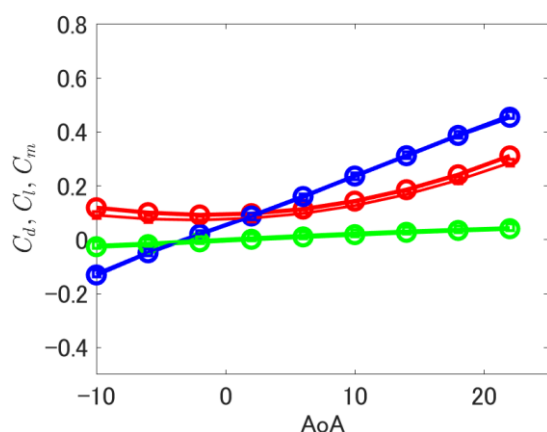


図7 機体079のM=4.0の空力係数

図5-7に、空力係数が良好に推定された機体079のMach数別の空力係数を示す。CDの予測値に真値との若干のずれが見られるが、それ以外は良好に予測されている。

次に式(14)～(16)の手順に従って空力係数を入力して機体のLSFを推定する。推定された機体079のLSFと、真値のLSFをそれぞれ図8と図9に示す。両者

を比較すると翼の厚さや前縁などに違いは見られるものの、主翼面積やノーズ長さ、エンジン取り付け位置などは定性的に捉えており、機体全体の概形は推定できている。

また機体003の推定した空力係数を図10-12、図13に推定したLSF、図14にLSFの真値を示す。機体003も機体079と同様に空力係数とLSFの両者において推定値と真値との良好な一致が確認できる。これらの結果から本手法を用いることで機体形状が変化した場合でも空力係数と機体形状の両者に対して良好な推定結果が得られることが確認された。

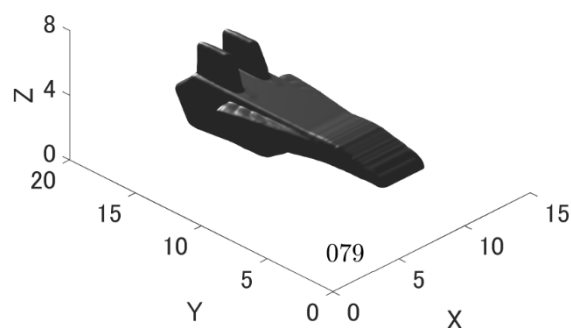


図8 機体079のLSFの推定結果

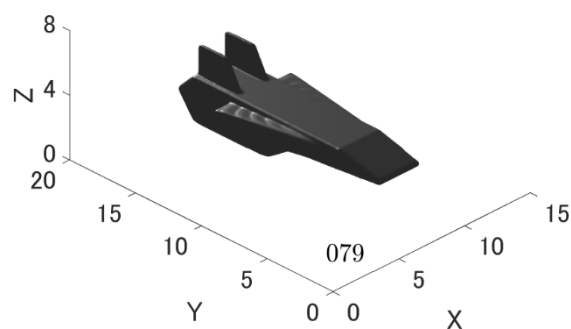


図9 機体079のLSFの真値

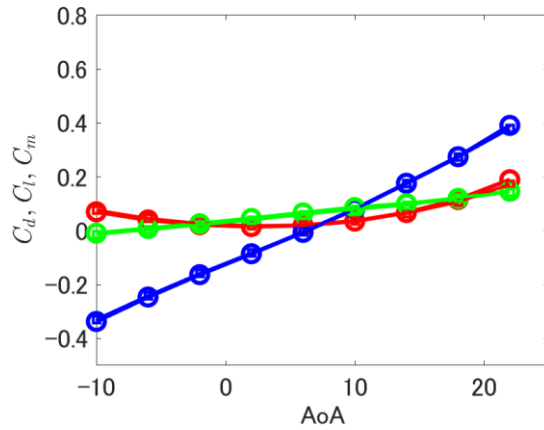


図10 機体003のM=0.3の空力係数

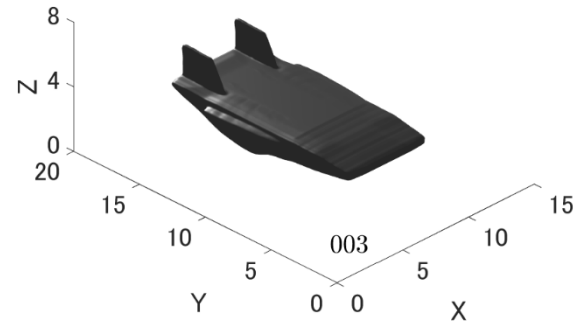


図13 機体003のLSFの推定結果

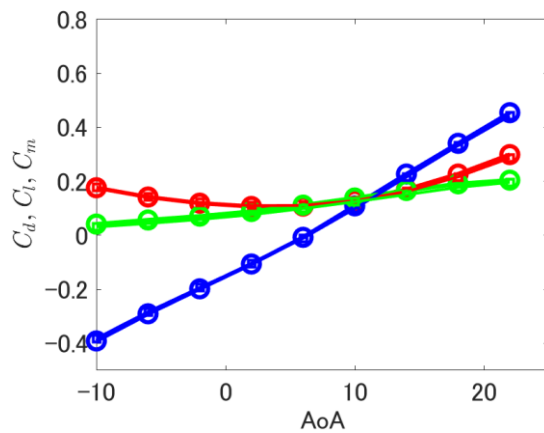


図11 機体003のM=1.1の空力係数

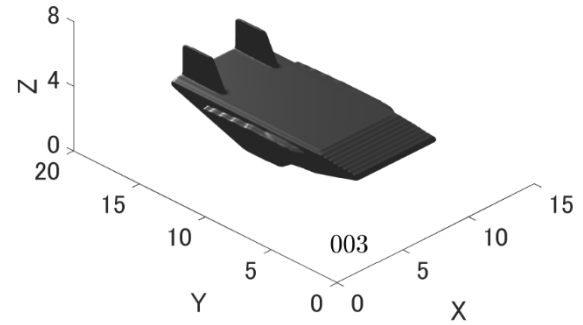


図14 機体003のLSFの真値

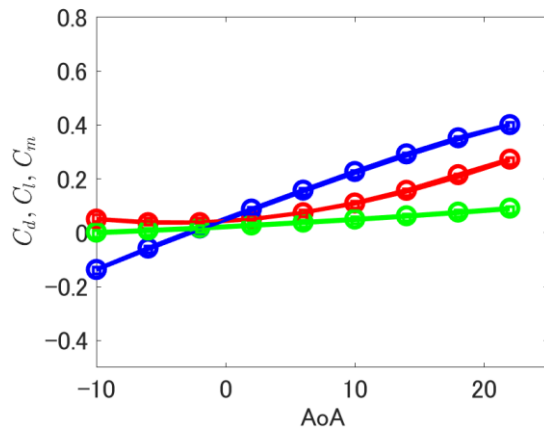


図12 機体003のM=4.0の空力係数

3. 3. 不良な推定結果の空力係数と機体形状

図15-17に機体163のMach数別の空力係数を示す。空力係数の推定結果と真値のずれが機体003や079よりも大きく、傾きを正しく推定できていない。またそれ方としては基本的に過小評価されている。

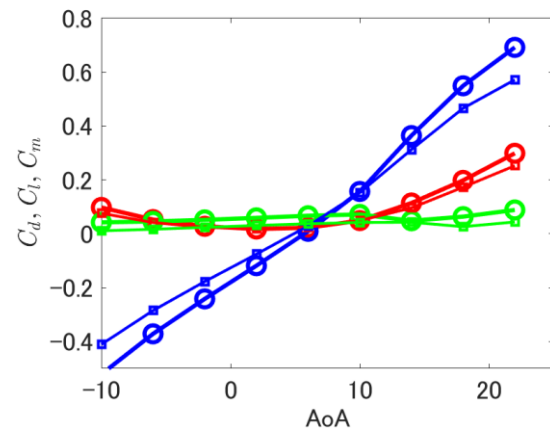


図15 機体163のM=0.3の空力係数

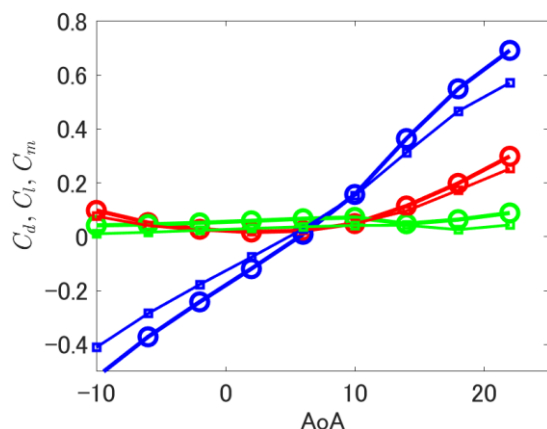


図16 機体163のM=1.1の空力係数

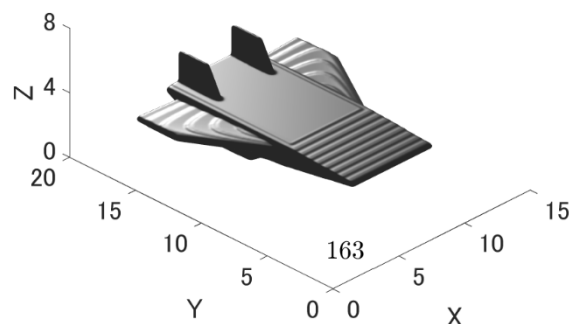


図19 機体163のLSFの真値

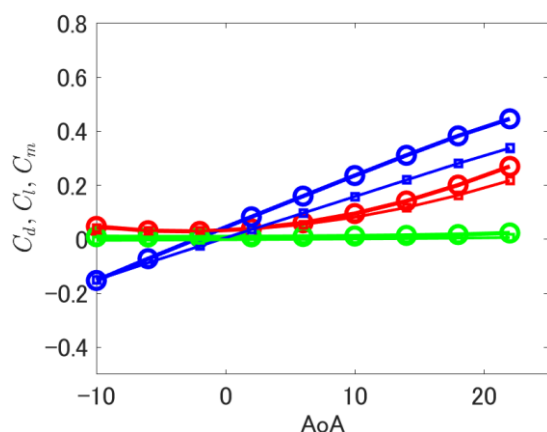


図17 機体163のM=4.0の空力係数

次に推定された機体163のLSFと真値のLSFを図18と図19に示す。両者を比較するとエンジン位置やノーズの長さはある程度似通っているが、一方で主翼面積が顕著に異なっている。

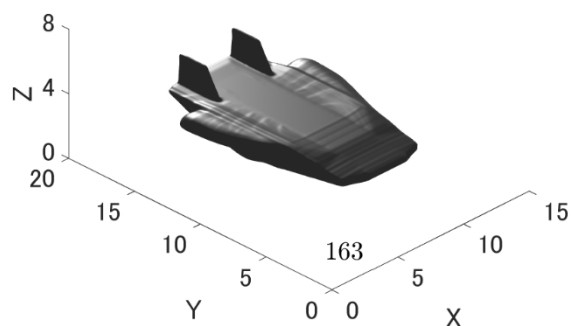


図18 機体163のLSFの推定結果

同じように推定が不良であった機体001の空力係数の推定結果を図20-22、LSFの推定結果を図23、真値を図24に示す。機体163と同様に全ての空力係数の推定値が真値に対して過小評価され、また推定形状は機体163と同様に主翼が大きな翼面積の機体である。この2つの機体は学習データの中でも最大の主翼面積の機体に該当するため、学習範囲の中で考えると推定値の周りに学習データが少なく、外挿に近い推定になったことが想定される。そこで今後はさらに大きな主翼面積の機体を学習データに含めることで推定値の周りに近い学習データを配置すれば、より精度良い推定が可能になると考えた。

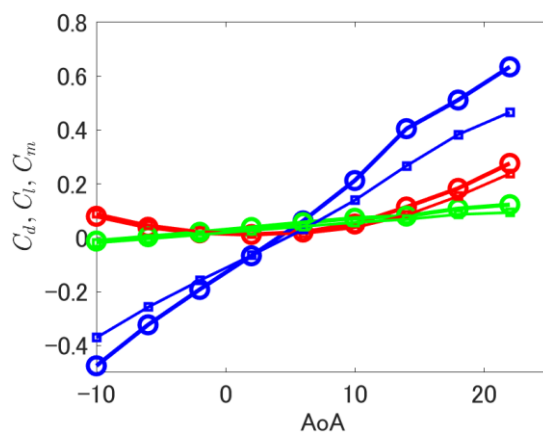


図20 機体001のM=0.3の空力係数

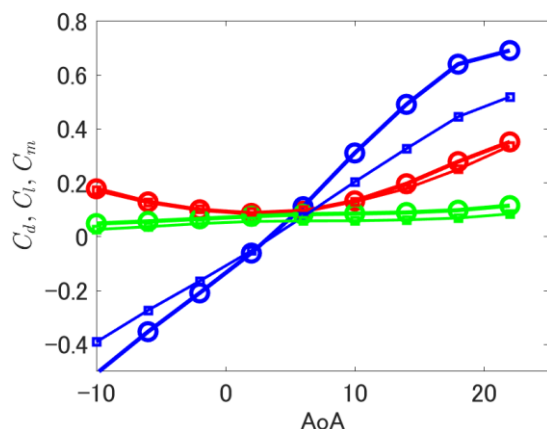


図21 機体001のM=1.1の空力係数

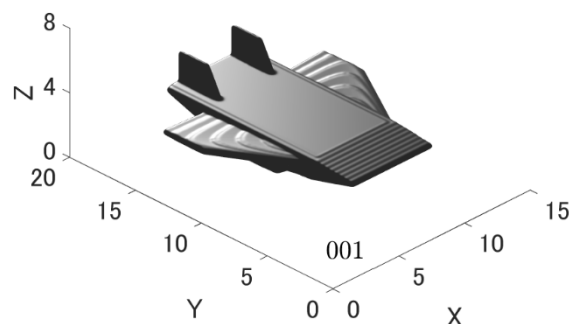


図24 機体001のLSFの真値

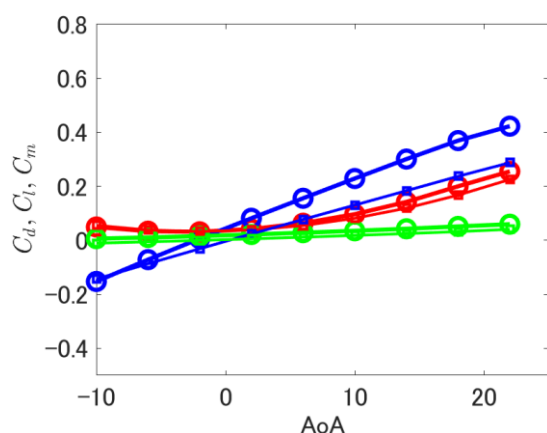


図22 機体001のM=4.0の空力係数

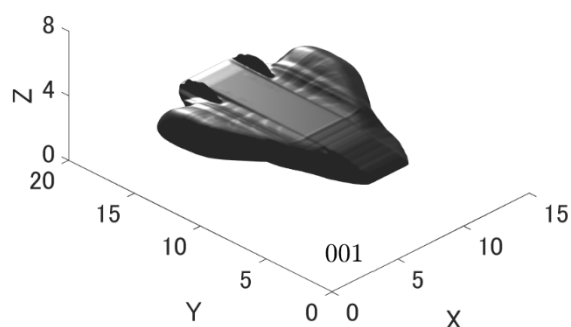


図23 機体001のLSFの推定結果

4. 結言

高速輸送機の空力最適化を目的に、機体形状のレベルセット関数と、CFD解析から得られた空力係数の両者に対してモード分解を適用してサロゲートモデルを構築して予測精度の検証を行った。その結果、本研究で提案した手法が様々な種類の機体形状を空力係数から決定することが可能であることが示された。一方で推定する値の周りに学習データが少ない、すなわち類似形状が少ない状況での推定を行うと誤差が拡大する傾向も確認され、推定した値がどの程度の学習データに基づいて構成されているか等を示す指標や、学習データを追加する指標や手法についての検討が今後の課題と考えられた。

謝辞

本研究を行うにあたり、解析データの作成と試行において、JAXA角田宇宙センター計算センターの宗像利彦氏、井上拓氏、福井正明氏、並びに大阪公立大学 佐々木大輔教授、加藤悠之氏の助力を得た。また数値計算を実行するにあたりJAXAスーパーコンピュータシステム JSS3を利用した。ここに謝意を表する。

参考文献

1. Maruyama, Daigo, et al. "Aerodynamic design of biplane airfoils for low wave drag supersonic flight." 24th AIAA Applied Aerodynamics Conference. 2006.
2. Sasaki, Daisuke, et al. "Automated aerodynamic optimization system for SST wing-body configuration." Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space sciences 46.154

- (2004): 230-237.
3. 大林茂, "航空機空力設計における多目的最適化", システム／制御／情報 47 (2003) 253-258.
 4. 中橋和博, "航空機の空力形状と最適設計", ながれ26 (2007) 259-265.
 5. Yamazaki, Wataru, et al. "Aerodynamic design optimization using the drag-decomposition method." AIAA journal 46.5 (2008): 1096-1106.
 6. Li, Jun-Lin, et al. "The aerodynamic optimization of hypersonic vehicles with the proper-orthogonal-decomposition-based CST method." Aerospace Science and Technology 151 (2024): 109295.
 7. Yang, Yuxin, et al. "Aerodynamic shape optimization based on proper orthogonal decomposition reparameterization under small training sets." Aerospace Science and Technology 147 (2024): 109072.
 8. Fujio, Chihiro, and Hideaki Ogawa. "Optimization and data mining for shock-induced mixing enhancement inside scramjet using stochastic deep-learning flowfield prediction." Aerospace Science and Technology 154 (2024): 109513.
 9. 赤坂啓, 陳放歌, 寺口剛仁. "機械学習を用いた自動車空力性能を予測するためのサロゲートモデル開発." 自動車技術会論文集 52.3 (2021): 621-626.
 10. Tran, Jonathan, et al. "Aerodynamics-guided machine learning for design optimization of electric vehicles." Communications Engineering 3.1 (2024): 174.
 11. 齋藤勇士. "データ駆動型スパースセンシングによる航空宇宙開発の飛躍." 日本ロボット学会誌 41.8 (2023): 665-668.
 12. Kobayashi, Kan, et al. "Reaction mechanism reduction for ethylene-fueled supersonic combustion CFD." CEAS Space Journal 15.6 (2023): 845-866.
 13. Nagata, Takayuki, et al. "Assessment of sensor optimization methods toward state estimation in a high-dimensional system using Kalman filter." IEEE Sensors Journal (2024).
 14. Heinze, W., and A. Bardenhagen. "Waverider aerodynamics and preliminary design for two-stage-to-orbit missions, part 2." Journal of Spacecraft and Rockets 35.4 (1998): 459-466.
 15. Bowcutt, Kevin G. "Multidisciplinary optimization of airbreathing hypersonic vehicles." Journal of Propulsion and Power 17.6 (2001): 1184-1190.
 16. Tsuchiya, Takeshi, et al. "Multidisciplinary design optimization for hypersonic experimental vehicle." AIAA journal 45.7 (2007): 1655-1662.
 17. Lewis, Mark. "A hypersonic propulsion airframe integration overview." 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. 2003.
 18. Wu, Xiaojing, et al. "Benchmark aerodynamic shape optimization with the POD-based CST airfoil parametric method." Aerospace Science and Technology 84 (2019): 632-640.
 19. 川本裕樹, 高橋俊, 蔵本結樹, 落合成行, 畔津昭彦, 山本憲司. (2020). ピストンリング周辺のオイル消費機構に対する level set 法に基づく混相流解析の応用. 自動車技術会論文集, 51(6), 968-973.
 20. Takahashi, Shun, et al. "Prediction of Heat Transfer in a Heat Pipe by Two-phase Flow Simulation based on Conservative Level Set Method." 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2018.
 21. Mizuno, Yusuke, et al. "A simple immersed boundary method for compressible flow simulation around a stationary and moving sphere." Mathematical Problems in Engineering 2015.1 (2015): 438086.
 22. Nagata, Takayuki, et al. "A simple collision algorithm for arbitrarily shaped objects in particle - resolved flow simulation using an immersed boundary method." International Journal for Numerical Methods in Fluids 92.10 (2020): 1256-1273.
 23. Hartmann, Daniel, et al. "The constrained reinitialization equation for level set methods." Journal of computational physics 229.5 (2010): 1514-1535.
 24. Okabayashi, Naoaki, et al. "Discrete element method-based simulation system for predicting natural stone evacuation pathways in patients with urolithiasis." Computers in Biology and Medicine 184 (2025): 109454.
 25. Möller, Tomas, and Ben Trumbore. "Fast, minimum storage ray/triangle intersection." ACM SIGGRAPH 2005 Courses. 2005. 7-es.
 26. 加藤悠之, 佐々木大輔, 高橋俊, 竹腰正雄, "スペースプレーン設計に向けたFaSTARによる広い速度域に対する空力解析の基礎検討", 日本航空宇宙学会北部支部2025年講演会ならびに第6回再使用型宇宙輸送系シンポジウム, 2025年