

3D09 低マッハ数流れにおける平面波近似を用いた音響変動抽出方法

池田 友明 (JAXA 航空技術部門)

On the Spurious Mode Filtering by Plane Wave Approximation in Low-Mach Flow

Tomoaki IKEDA (JAXA ATD)

Key Words : Computational aeroacoustics, Acoustic wave equation, Spurious mode filtering

Abstract

To impose a proper boundary condition on the surface source located in the acoustic domain for the convected acoustic wave equation, vortical modes should be removed to avoid spurious mode emission. Plane wave approximation was proved to be effective for this purpose in a simple noise emission problem. Here we validate the approximated approach for an acoustic field with strong interference. By considering the singularity and complex nature of wavenumbers, a more suitable formulation is derived for the plane-wave approximation, which shows better quantitative far-field results in a low Mach flow.

1. 研究目的

本研究においては、CFD からの時系列流れ場情報を音源情報として、そこから発生・伝播する空力騒音を解く分離解法をターゲットとする。筆者らは非一様な流れ場に適用可能な移流型波動方程式を階層型直交格子上で扱う手法を開発し、実機スケールの騒音伝播解析などに応用している^{1,2)}。周波数領域で記述された移流型波動方程式は、音響速度ポテンシャルを直交格子上でマトリクス反復解法により解く。また、埋込境界法を導入することで非透過壁や空間中に設定された音源面を扱う。

ここでは CFD からの音源インプットを扱う方法として、解析領域中に音源面を設定し、CFD から得られる非定常流れ場情報をマッピングすることを想定する。騒音伝播コードの中では音源を面境界条件として扱うことができる。しかしながら、既報³⁾にて議論された通り、移流型波動方程式では音響変動しかを扱うことができないため、渦変動がインプットとして与えられると、Spurious なモードとして卓越することがある。そのため、流れ場情報を音源としてインプットする際には、音響変動のみを抽出することが望ましい。本研究においては、音響変動抽出のために導入された平面波近似について、その妥当性を検証する。

2. 数学的定式化

本節では音響変動伝播を解く非一様波動方程式の音響変動抽出に係る定式化について述べる。

2.1 基礎方程式

ここでは、以下の音響変動に基づく速度ポテンシャル ϕ に関する移流型波動方程式を基礎式とする⁴⁾：

$$\left[\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \nabla) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{c^2} \frac{D}{Dt} \right) \right] \phi = 0 \quad (1)$$

ここで ρ は流れ場の密度、 c は局所音速、 $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$ は定常な流速 \vec{u} に関する Lagrange 微分である。波動方程式 Eq. (1) は時間 t に関してフーリエ変換をかけることで移流型

Helmholtz 方程式の形を取る。着目される周波数モードについて直交格子上で空間的に離散化し、反復解法により解を求める^{5,6)}。

音響速度ポテンシャル ϕ をフーリエモードに分解する時、周波数 ω の寄与について

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \hat{\phi}(\vec{x})$$

と置く。この時、音響速度変動 \vec{u}' と圧力変動 p' のフーリエモードはそれぞれ以下のように表される：

$$\hat{\vec{u}}' = \nabla \hat{\phi}, \quad \frac{\hat{p}'}{\rho} = (i\omega - \vec{u} \cdot \nabla) \hat{\phi} \quad (2)$$

この2式より

$$\hat{\phi} = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{\hat{p}'}{\rho} + \vec{u} \cdot \hat{\vec{u}}' \right) \quad (3)$$

が求まる。Eq. (3) は圧縮性非回転流れにおける Bernoulli の式に相当する。

2.2 平面波近似による音響成分の抽出

CFD コードからの流れ場データを周波数処理し、 $\hat{\vec{u}}'$, \hat{p}' が求まると、Eq. (3) より流れ場中の音響速度ポテンシャルを推定することができる。しかしながら、一般に CFD コードの速度場には渦変動成分が含まれているため、スカラーポテンシャルを求めるために $\hat{\vec{u}}'$ をそのまま使うことができず、音響変動成分を抽出する必要がある。ここでは既報³⁾と同様に、速度変動の発散をソース項に取る以下の $\hat{\phi}$ に関する Poisson 方程式より音響モードを推算する：

$$\nabla^2 \hat{\phi} = \nabla \cdot \hat{\vec{u}}' \quad (4)$$

Poisson 方程式を直接全空間で解く代わりに、音響速度ポテンシャルが局所的に平面波で近似できると仮定する：

$$\phi \propto \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x})$$

ここで \vec{k} は波数ベクトルである。 $\hat{\phi}$ と同様に $\nabla \cdot \hat{u}$ も平面波分布を取るものとする、波数ベクトルは以下より求まる：

$$\vec{k} = -i \frac{\nabla(\nabla \cdot \hat{u})}{\nabla \cdot \hat{u}} \quad (5)$$

既報³⁾では \vec{k} は、波動方程式より導かれる分散関係式に従う実ベクトルと仮定したが、本稿では必ずしもこの条件は適用しない。Eq. (4) に平面波の式を代入すると

$$\hat{\phi} = -\frac{\nabla \cdot \hat{u}}{\vec{k} \cdot \vec{k}} \quad (6)$$

より、 $\nabla \cdot \hat{u}$ の分布が与えられれば、平面波近似に基づいた Eq. (5) と Eq. (6) より $\hat{\phi}$ は代数的に推算可能である。

2.3 平面波近似の妥当性に関する考察と別表記の提案

本節では、音響速度ポテンシャルの推算に用いられる平面波近似の妥当性について考察する。ここまでの議論は独立な単一の平面波については厳密に成り立つが、一般にはそうではない。例えば三次元空間中に置かれた単極子音源によって発生する球面波の場合、音源からの距離を r とすると、Eq. (5) 右辺の分子項のように速度の発散や音響速度ポテンシャルの勾配を取る場合に、微係数が $i\vec{k}$ と評価できる寄与 $\sim O(r^{-1})$ に加えて、そうできない寄与が $O(r^{-2})$ で存在する。すなわち、平面波近似は音源から十分離れた場所でのみ有効である。

また、複数の平面波による干渉が生じる際にも注意が必要である。Eq. (5) により評価される波数は、一般に複素ベクトルになる。特に、干渉により音圧が極小になる場合、 $\nabla \cdot \hat{u} \rightarrow 0$ であるため、波数は通常の平面波よりも大きな値を取る。その場合、Eq. (6) による平面波近似表記では波数ベクトルの大きさが直接的に音響ポテンシャルの予測精度に影響を与えるため、ここでは以下に示すように別の表記を導く。

時間領域における基礎数 Eq. (1) に関して、式中の平均場の熱力学的変数、密度及び温度が一樣と仮定すると、体積音源なしの斉次式は以下のように書ける：

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{D}{Dt} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad (7)$$

この時、速度変動の発散に関する Poisson 方程式 Eq. (4) は以下のように変形される：

$$\left(-\frac{i\omega}{c} + \vec{M} \cdot \nabla \right)^2 \hat{\phi} = \nabla \cdot \hat{u} \quad (8)$$

ここで $\vec{M} = \vec{u}/c$ である。平面波近似を導入すると

$$\hat{\phi} = -\frac{\nabla \cdot \hat{u}}{\left(\omega/c - \vec{M} \cdot \vec{k} \right)^2} \quad (9)$$

Eq. (9) は Eq. (6) と比較して、波数ベクトル \vec{k} に局所マッハ数の重みがかかっているため、特に低マッハ数流れにおいて \vec{k} の予測精度の影響を受けにくい。また、Eq. (7) を導出する際に用いた平均場における熱力学的変数一定の仮定も、低マッハ数流れであれば多くの場合近似的に有効である。

3. 一様流中の二次元音源による音の干渉

本節では、二次元流れ場中に置かれた二つの音源から生成される音波の干渉を直交格子上で差分法により解く。計算スキームの詳細については既報¹⁾を参照のこと。得られた音響変動場に対して前節で導出された平面波近似を適用し音響速度ポテンシャルの推算を行い、実際に得られた音響速度ポテンシャルとの比較を行う。音源は単極子を疑似したものであり、 $[\pm 1, 0]$ の2点を中心とし、中心位置からの距離 r に関して

$$\exp \left[-\log(2) \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

の空間分布の重みがけを与える。ここでは $R = 0.1$ とする。音源の変動周波数は $\omega = 4\pi$ とし、振幅は1とする。静止場中を伝播する音波長は0.5である。二つの音源は同位相とする。また、音速及び密度をそれぞれ1とする。計算領域は $[-12, 12] \times [-12, 12]$ の範囲を取り、音が外部境界で反射しないように、外部境界から長さ2の範囲で減衰領域を設ける。ここでは一様流として、 $M = 0.3$ を選ぶ。流れのない $M = 0$ のケースも解析を実施し、流れありのケースと比較する。

なお、本節では、音響速度ポテンシャル推算の平面波近似 Eqs. (6) & (9) 中で用いられる $\nabla \cdot \hat{u}$ に関して、連続の式より以下の表記を用いる：

$$\nabla \cdot \hat{u} \simeq \frac{1}{\rho} (-i\omega + \vec{u} \cdot \nabla) \hat{\rho} \quad (10)$$

音源として $\nabla \cdot \hat{u}$ を用いる場合、CFD コード内で速度の勾配を評価したものを入力とすることが想定されるが、その空間精度が音響速度ポテンシャルの推算に直接影響を与えるため、なるべく高次の評価方法を用いることが望ましい。しかしながら、Eq. (10) を用いることで、特にマッハ数が低い場合には、空間の勾配評価精度の直接的な影響を抑えることができる。

3.1 静止場のケース ($M = 0$)

まずは静止場中の音波の干渉の再現性について検討する。Fig. 1 に Eq. (9) に基づいた平面波近似の結果を示す。音源は同位相であるため、左右対称な結果が得られ、二つの音源の間には干渉により音圧が極小になる節の位置が縦方向に複数延びている。この分布は、Eq. (10) を用いているため

$$\hat{p} = c^2 \hat{\rho} = i\omega \rho \hat{\phi}$$

より、波動方程式コードにより得られる解 $\hat{\phi}$ に一致する。

比較のため、Fig. 2 に、Poisson 方程式より直接求まる式 Eq. (6) を平面波近似として用いた結果を示す。平面波近似により推算される波数が干渉により音圧極小となる位置で極端に大きく予測されることにより、ポテンシャル予測が困難となっていることがわかる。以下では、平面波近似として Eq. (9) のみを用いることとする。

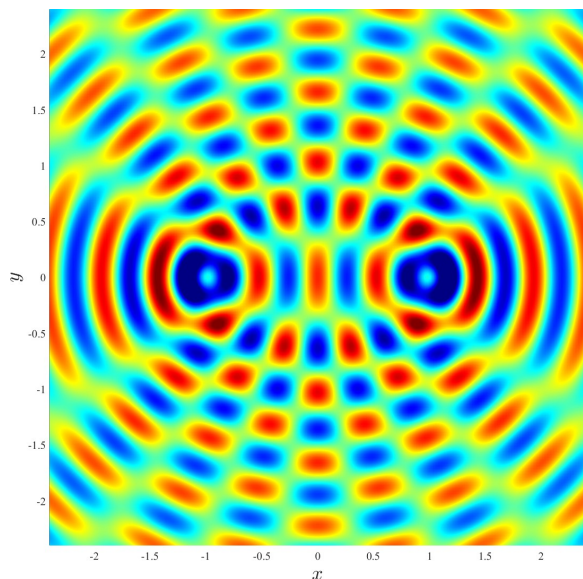


Fig. 1 Instantaneous distributions of acoustic velocity potential near noise sources at $M = 0$. Color range indicates $\pm 8.0 \times 10^{-3} c_\infty / D$ from red to blue.

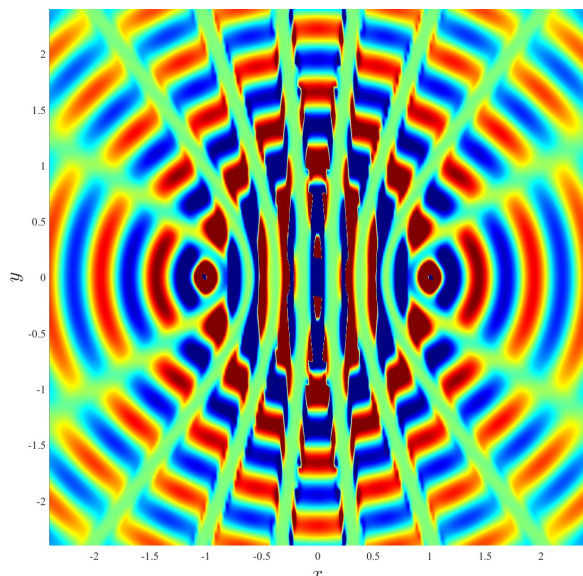


Fig. 2 Instantaneous distributions of acoustic velocity potential approximated by Eq. (6) at $M = 0$.

3.2 流れありのケース ($M = 0.3$)

ここでは、平均場に $M = 0.3$ の一様流があるケースについて検討する。Fig. 3 に、波動方程式コードより直接得られたポテンシャル分布を示す。平均場の流れにより、左右非対称な音響場となる。下流側により振幅の大きなポテンシャル分布が見られる。

次に、Fig. 4 に、平面波近似式 Eq. (9) による近似解を示す。これを Approach A と呼ぶ。概ね、直接的な数値解の分布 Fig. 3 を良好に再現できていると言えるが、音源に挟まれた干渉において、上流の音源側のポテンシャル極小の節の位置で局所的に過大評価が見られる。これは波数が極端に大きく予測されることに起因する。

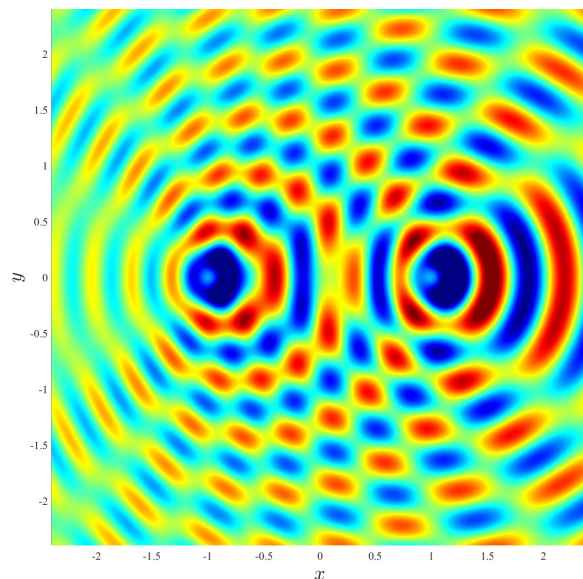


Fig. 3 Instantaneous distributions of acoustic velocity potential obtained directly by the wave equation solver at $M = 0.3$.

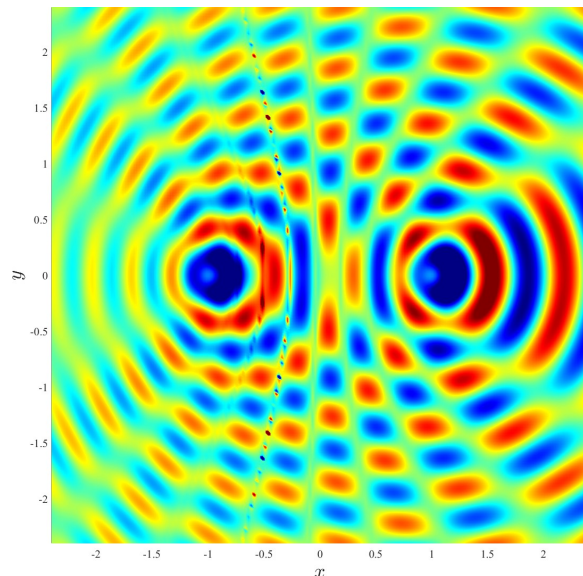


Fig. 4 Instantaneous distributions of acoustic velocity potential approximated by Eq. (9), Approach A, at $M = 0.3$.

ここで、波数ベクトルの大きさを制限する方法を考える。既報³⁾より、移流型波動方程式から導かれる分散関係式から、波数ベクトルの大きさ κ に関して

$$\kappa = \frac{\omega}{c(1 + M_\kappa)} \quad (11)$$

が与えられる。ここで、 $M_\kappa = \vec{u} \cdot \hat{\kappa} / c$, $\hat{\kappa} = \vec{\kappa} / \kappa$ である。

まずは、既報³⁾と同様に、波数は実ベクトルと仮定し、波数の大きさを Eq. (11) で与えた場合の平面波近似の結果を Fig. 5 に示す。これを Approach B と呼ぶ。Fig. 4 で観察された、極小値分布域での過大評価は抑えられているが、音源近傍の干渉を示す分布は波動方程式解 Fig. 3 とは大きく異なる

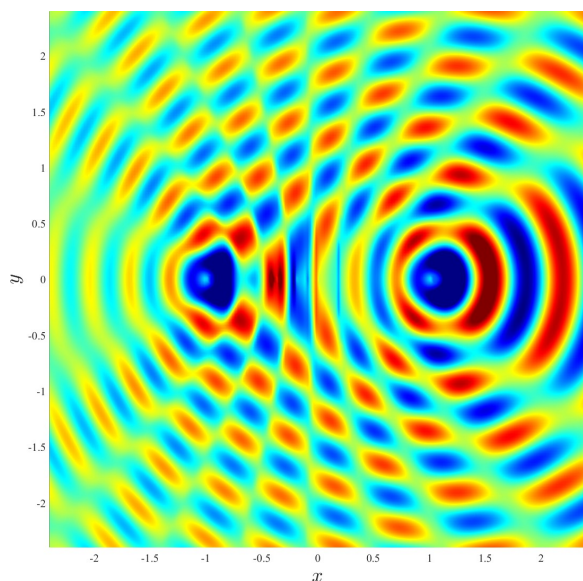


Fig. 5 Instantaneous distributions of acoustic velocity potential approximated by Eq. (9) and prescribed magnitude of real wavenumber given by Eq. (11), Approach B, at $M = 0.3$.

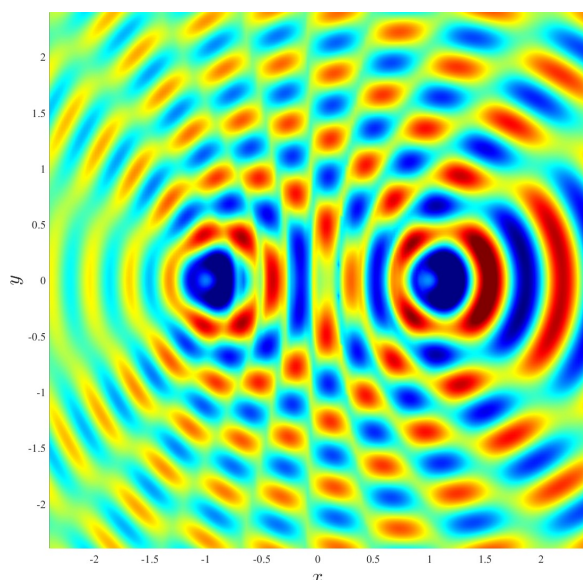


Fig. 6 Instantaneous distributions of acoustic velocity potential approximated by Eq. (9) and limited magnitude of complex wavenumber given by Eq. (11), Approach C, at $M = 0.3$.

結果となる。

次に、波数は複素ベクトルとし、波数ベクトルの大きさに関して Eq. (11) でリミットをかける。これを Approach C と呼ぶ。結果を Fig. 6 に示す。干渉による音圧極小を取る位置において、不自然に小さな値を取る様子が伺えるが、音源近傍の分布は Approach B と比較すると定性的により波動方程式解 Fig. 3 に近い。しかしながら、いずれも音源から離れた位置においては、定量的に波動方程式数値解に近づく結果となるように見える。

最後に、 $M = 0.3$ の結果に関して、音響ポテンシャルの指

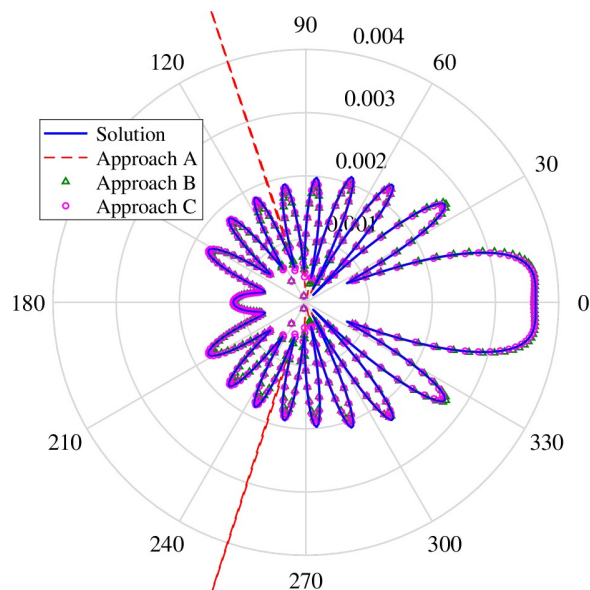


Fig. 7 Polar diagram for complex acoustic velocity potential magnitudes at $r = 1.5$.

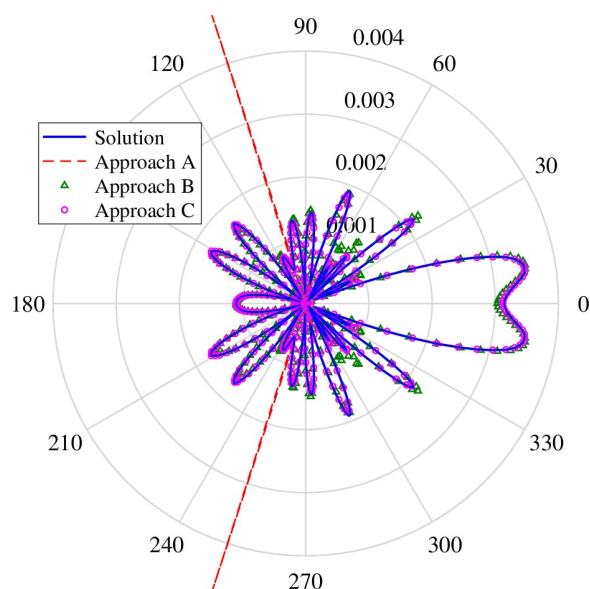


Fig. 8 Polar diagram for the magnitudes of real part of complex acoustic velocity potential at $r = 1.5$.

向性比較を行った。半径 1.5 における複素ポテンシャルの絶対値 Polar 分布を Fig. 7 に示す。Approach A の結果において局所的に生じる過大評価を除けば、本節で比較した 3 通り全ての近似手法は概ね良好に一致する。しかしながら、同じく複素ポテンシャルの実部のみの指向性を比較すると、Fig. 8 よりわかるように、波数を分散関係式に従う実ベクトルとした Approach B は、特に角度 $30 [\text{deg.}] < \theta < 60 [\text{deg.}]$ の範囲においてそれ以外の分布から目に見えるレベルでの相違が観察される。波数を実数と仮定することで、干渉の影響の強い領域において位相誤差が卓越することがわかる。

4. まとめ

本稿では移流型波動方程式の音源を CFD コードにより与えることを想定して、音響変動を抽出する際に用いられる平面波近似の妥当性について検証した。現状の波数分布予測手法では、音波の干渉により音圧が極小になる位置において波数ベクトルの大きさが過大となるため、低マッハ数流れにおいてこの影響を抑える定式化を提案した。 $M = 0.3$ で点音源同士が干渉する音響場において検証を実施した。波数ベクトルに補正を加えない場合、音圧極小の位置において局所的にポテンシャルの過大評価がされるが、波数ベクトルを複素数として扱い、その大きさに関して分散関係式に従う補正をかけたところ、音源から離れた位置においては定量的に適切なポテンシャル予測が可能であることを示した。

参考文献

- 1) 池田友明. 非一様波動方程式の直交格子解法. 第 50 回流体力学講演会/第 36 回航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム, 3D07, 2018.
- 2) 池田友明, 古谷龍太郎, 村山光宏. 胴体後部エンジン搭載形態旅客機の実機スケールファン騒音解析. 第 54 回流体力学講演会/第 40 回航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム, 3C04, 2022.
- 3) 池田友明. 非一様波動方程式の面音源上の渦変動の影響について. 第 56 回流体力学講演会/第 42 回航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム, 2C01, 2024.
- 4) A. D. Pierce. Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 87, No. 6, pp. 2292–2299, 1990.
- 5) I. Harari and E. Turkel. Accurate finite difference methods for time-harmonic wave propagation. *J. Comput. Phys.*, Vol. 119, pp. 252–270, 1995.
- 6) Y. A. Erlangga, C. Vuik, and C. W. Oosterlee. On a class of preconditioners for solving the Helmholtz equation. *Appl. Numer. Math.*, Vol. 50, pp. 409–425, 2004.