

2B07 リーマン多様体を用いたAMRと CFDへの応用

○中澤嵩（金沢大学学術メディア創成センター/（兼）大阪大学D3センター）

AMR with Reimann manifold and application to CFD

Key Words : AMR, CFD, Reimann manifold

Abstract

In this presentation, the author introduces Anisotropic Adaptive Mesh Refinement implemented in FreeFEM. Error analysis based on Finite element method is able to derive a upper bound, and this AMR generates a new finite element mesh to minimize the upper bound.

1. はじめに

本講演では、FreeFEMにインプリメントされている Anisotropic Adaptive Mesh Refinement にアルゴリズムについて概説する。このAMRソルバーは有限要素法の誤差解析をもとに数値誤差を評価し、この誤差を最小化するように有限要素メッシュを再度作成するように構成されている。具体的には、数値フラックスの大きい方向にエッジが向けられ、尚且つ、エッジの大きさも短くなる。その結果、必要な個所に格子点を充填させ、そうでない箇所には省くようにできている。最終的には、格子点数を削減することになり計算コストの抑制につながると期待される。

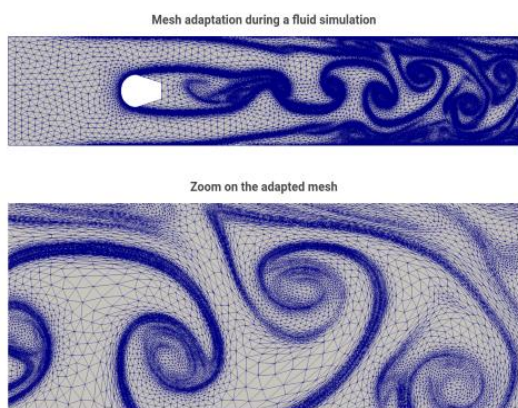


Fig. 1. Over view (upper) and Zoom view (under) obtained by Mesh adaptation with AMR.

2. Riemann Metric Space

まず初めに、2次元領域 $\Omega = \{[x, y]^T \in \mathbb{R}^2\}$ 上で $\sigma(x, y) = x^2 - y^2$ を定義する。次に、 x, y, σ の3次元空間に埋め込まれた2次元曲面 S を下記のように定義する。

$$S = \{[x, y, \sigma(x, y)] \in \mathbb{R}^3\} \\ \{|\sigma(x, y) = x^2 - y^2\}$$

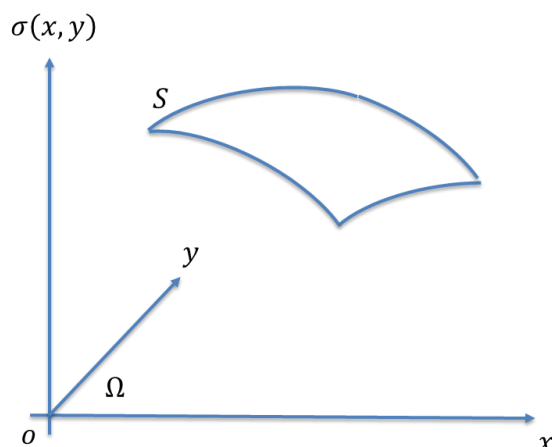


Fig. 2. 2-dimensional surface embedded in the domain $\Omega \times \sigma$.

この Ω 上で媒介変数 $0 \leq t \leq 1$ を用いて、 γ を定義する。

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) = [x(t), y(t)]^T$$

次に、 γ を S に射影して、やはり媒介変数 $0 \leq t \leq 1$ を用いて、 c を定義する。

$$c: [0, 1] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, t \mapsto c(t) = [x(t), y(t), \sigma(x, y)]^T$$

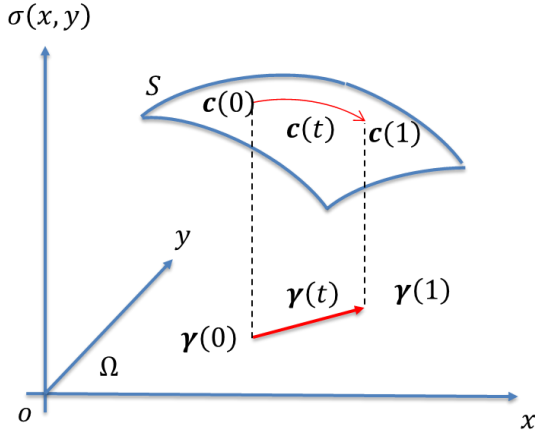


Fig. 3. γ on Ω and c on S .

最後に、この c を S 上で線積分すると、

$$l(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt = \int_0^1 \sqrt{[\delta x, \delta y] M [\delta x, \delta y]^T} dt$$

となる。ここで、

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} x^2 & -xy \\ -xy & y^2 \end{bmatrix}, \delta x = \frac{dx}{dt}, \delta y = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{dc}{dt} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d\sigma}{dt} \right]^T = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 2x \frac{dx}{dt} - 2y \frac{dy}{dt} \right]^T$$

であり、

$$\left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 = [\delta x, \delta y] M [\delta x, \delta y]^T$$

である。

3. Geometric Interpretation

まず初めに、以下のように M を対角化する。

$$M = R \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} R^T, R = [\bar{b}_1, \bar{b}_2], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

次に、 $[\delta x, \delta y]^T = \delta x$ の近傍 $v(x)$ の集合を $\Phi_M(\epsilon)$ と定義する。

$$\Phi_M(\epsilon) = \{ \delta x \in v(x) | \delta x^T M \delta x = \epsilon \}$$

ここで、 $\epsilon = 1$ として下記の議論を展開する。

$$\begin{aligned} \Phi_M(1) &= \left\{ \delta x \in v(x) | \delta x^T R \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} R^T \delta x = 1 \right\}, \\ &= \left\{ \delta x \in v(x) | \delta x^T [\bar{b}_1, \bar{b}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\bar{b}_1, \bar{b}_2]^T \delta x = 1 \right\}, \\ &= \left\{ \delta x \in v(x) | \tilde{\delta x}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tilde{\delta x} = 1, \tilde{\delta x} = \delta x^T [\bar{b}_1, \bar{b}_2] \right\}, \\ &= \left\{ \delta x \in v(x) | \sum_{i=1}^d \lambda_i \tilde{\delta x}_i^2 = 1 \right\}, \\ &= \left\{ \delta x \in v(x) | \sum_{i=1}^d \left(\frac{\tilde{\delta x}_i}{h_i} \right)^2 = 1, h_i = \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

最終行は楕円の方程式であり、固有値と固有ベクトルに応じて短軸・長軸の向きと大きさが決定される。

4. Geometric Error Estimate

ここでは、有限要素法の誤差解析を元に最大値ノルムを評価する。

$$\begin{aligned} &(u - \Pi_h u)(X + t \delta x) \\ &= (u - \Pi_h u)(X) + \langle \delta x, \nabla(u - \Pi_h u)(X) \rangle \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \langle \delta x, H_u(X + t \delta x) \delta x \rangle dt \\ &= \int_0^1 (1-t) \langle \delta x, H_u(X + t \delta x) \delta x \rangle dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|(u - \Pi_h u)(X + t \delta x)| \\ &= \left| \int_0^1 (1-t) \langle \delta x, H_u(X + t \delta x) \delta x \rangle dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 (1-t) \langle \lambda \delta y, H_u(X + t \delta x) \lambda \delta y \rangle dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 (1-t) \lambda^2 \langle \delta y, H_u(X + t \delta x) \delta y \rangle dt \right| \\ &= \left(\frac{d}{d+1} \right)^2 \left| \int_0^1 (1-t) \langle \delta y, H_u(X + t \delta x) \delta y \rangle dt \right| \\ &\leq \left(\frac{d}{d+1} \right)^2 \max_{y \in \delta y} |\langle \delta y, H_u(y) \delta y \rangle| \left| \int_0^1 (1-t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d+1} \right)^2 \max_{y \in K} |\langle \delta y, H_u(y) \delta y \rangle| \\ &= c_d \max_{y \in K} |\langle \delta y, H_u(y) \delta y \rangle| \end{aligned}$$

ここで、 $c_d = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d+1} \right)^2$ である。更に、

$$\begin{aligned}
 \|u - \Pi_h u\|_{L^\infty(K)} &\leq c_d \max_{\mathbf{y} \in K} |\langle \delta \mathbf{y}, H_u(\mathbf{y}) \delta \mathbf{y} \rangle| \\
 &\leq c_d \max_{\mathbf{y} \in K} \max_{\mathbf{v} \subset K} |\langle \mathbf{v}, H_u(\mathbf{y}) \mathbf{v} \rangle| \\
 &\leq c_d \max_{\mathbf{y} \in K} \max_{i=1,2,3} |\langle \mathbf{e}_i, H_u(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \rangle| \\
 &= c_d \max_{\mathbf{y} \in K} \max_{i=1,2,3} l_{|H_u(\mathbf{y})|}^2(\mathbf{e}_i),
 \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{v}\|_{|H_u(\mathbf{x})|} &= \sqrt{\langle \mathbf{v}, H_u(\mathbf{y}) \mathbf{v} \rangle} \leq \max_{i=1,2,3} \sqrt{\langle \mathbf{e}_i, H_u(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \rangle} \\
 &= \max_{i=1,2,3} \|\mathbf{e}_i\|_{|H_u(\mathbf{x})|}, \\
 l_{|H_u(\mathbf{y})|}^2(\mathbf{e}_i) &= |\langle \mathbf{e}_i, H_u(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \rangle|
 \end{aligned}$$

である. この $l_{|H_u(\mathbf{y})|}^2(\mathbf{e}_i)$ に対して第3章で論じた方法
 でエッジの向きと大きさを最適化することで, Fig. 1
 のようなメッシュを作成することが可能となる.