

# Time-stepping 全体安定性解析を応用した 非線形成長過程の時間依存モード分解

○ 中村 悠斗, 佐藤 慎太郎, 大西 直文 (東北大)

Time-dependent mode decomposition of  
nonlinear-transient processes extending time-stepping global stability analysis  
Yuto Nakamura, Shintaro Sato, Naofumi Ohnishi (Tohoku University)

Key Words: Operator approach, Dynamic mode decomposition, Time-stepping approach, Wake flow

## Abstract

This study proposes a novel modal decomposition framework for transient flows by time-varying dynamic mode decomposition with extending time-stepping formulation. To enable the computation of eigenvectors associated with time-varying operators, we formulated conditions that flow data must satisfy for operator approximation at arbitrary time instances, and developed a time-stepping-based data acquisition strategy. The proposed strategy was applied to transient flow past a circular cylinder. The decomposition with prepared dataset successfully captured continuous temporal variations in growth rates, oscillation frequencies, and spatial distribution of modes. These results suggest that the proposed method can offer deeper insights into the dynamics of transient flows.

## 1 諸言

観測ロケットや、大気圏再突入機、航空機などの輸送機械や、空飛ぶ車や極超音速旅客機といった、次世代の輸送機械の周りでは、主流に含まれるさまざまな外乱により、流れの過渡的な変化が起こる。このような過渡的な変化は、物体周りの流れを予期しない状態に遷移させる。そのため、過渡的な変化を抑制するための制御手法が必要である。

多くの流体制御では、流れに含まれる主要な構造を抽出し、それをもとに将来の状態を予測する必要がある。主要な構造を抽出するための方法として、固有直交分解 (POD) [1,2] や動的モード分解 (DMD) [3,4] といった、データ駆動型のモード分解法 [5] が使われてきた。POD は、与えられた流れ場のデータセットを表現するために、最適なモードを抽出できる方法である。ただし、得られるモードには、決まった振動周波数はない。DMD は、特定の周波数で振動するモードを抽出できる方法である。DMD モードは、数学的には、支配方程式に由来する線形作用素の固有ベクトルとして定式化され、線形作用素による時間発展を DMD モードから予測できる。

既存のモード分解法の多くは、過渡的な成長に由来する、モードの振幅の増大や周波数の変調、空間分布の変化に対応することが難しい。例えば、POD では、流れの過渡的な成長過程で空間スケールが変化するため、その空間構造の変化を適切に分離できない。また、

DMD はモードの振幅の増幅や減衰は考慮できるが、特定の周波数の固有ベクトルを抽出するという性質上、過渡変化に内在する周波数変調に対応することができない。古くから使用されているフーリエ変換についても、周波数変調を含む場合、データセット全体に含まれる特定の周波数のスペクトルを得るという原理から逸脱しており、スペクトルの取得に失敗する。

一方、成長を伴うモードの抽出法として、全体安定性解析 [6,7] やレゾルベント解析 [8,9] がある。これらの方法は、(外力項を含む) 支配方程式に由来する作用素を、数値的に構築または近似し、その固有ベクトルを計算する。すなわち、POD や DMD のようなデータ駆動解析というより、数値計算に近い。実際に、time-stepping 法と呼ばれるアプローチに基づく全体安定性解析 [7] では、数値計算ソルバーを利用して作用素を近似する。これらの方法は、線形成長するモードを抽出できる点で、過渡流れのモード分解に近いが、非線形成長後の周波数の変調や、モードの空間分布の変化は考慮できない。したがって、過渡流れにおいて、振幅の増幅と周波数変調を考慮し、時間変化する主要な構造を抽出する方法の定式化が求められる。

過渡流れを分解する一つの方法は、モードの時間変化を許すことである。先行研究 [10,11] では、過渡的な成長過程における特定の時刻の流れを最適に表現するモードを考え、その変化を追うことで、過渡流れの表現に成功した。また、Ohmichi [12] は、中心周波数からの変調を考慮できる変分モード分解を流れ場に適用し、

得られた時間依存モードによって、過渡流れの再構築に成功している。DMD においては、わずかな計測点で、過渡的に時間変化する系の周波数変調を捉えることができるオンライン DMD が提案されている [13]。この方法では、DMD における線形作用素が時間変化するという概念の導入により、周波数の時間変化を可能にしている。ただし、この DMD を利用したアプローチは、過渡的に変化する空間分布を抽出するアプローチとなっていない。

本研究のモード分解のアイデアは、時間変化する作用素に対する DMD に基づく。特定の時刻の作用素を近似する方法として、time-stepping 法に基づく全体安定性解析を応用し、数値計算を利用したアプローチを提案する。提案する手法を円柱周りの過渡流れに適用し、作用素から任意の時刻の固有モードの計算が可能であることを示す。

## 2 time-stepping 法による時間依存モード分解

### 2.1 DMD アルゴリズム

DMD は、時系列データからコヒーレントな構造を抽出するために、Schmid [3] によって提案された。その有用性から、これまでに数多くのアルゴリズムが提案されてきたが、本研究では Exact DMD [4] を用いる。

DMD では、線形作用素  $A$  によって、

$$X' = AX \quad (1)$$

と関係づけられる時系列データを並べた行列、

$$\begin{aligned} X &= [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_M)] \in \mathbb{R}^{N \times M}, \\ X' &= [\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t_1), \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t_2), \dots, \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t_M)] \in \mathbb{R}^{N \times M}, \end{aligned} \quad (2)$$

を考える。ここで、 $M$  はスナップショット数、 $N$  はベクトル  $\mathbf{u}$  の要素数であり、(空間の格子点)  $\times$  (変数の数) に等しい。また、 $[\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t_1)]$  は、 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1)$  の  $\Delta T$  後の状態を表す。DMD では、厳密に線形な関係を満たしていない行列同士に対しても適用できるよう、最も線形に近い近似を与える作用素を考える。すなわち、

$$\underset{A}{\operatorname{argmin}} \|X' - AX\|^2 \quad (3)$$

を満たす  $A$  の固有ベクトルと固有値を計算する。この最小化問題は、特異値分解によって解くことができ、

$$A = X'V_M\Sigma_M^{-1}U_M^T, \quad (4)$$

と与えられる。ここで、 $U_M \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 、 $V_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 、 $\Sigma_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$  は、それぞれ、 $X$  の左、右特異ベクトル、特異値である。また、上付き文字  $T$  は行列の転置を表す。ただし、 $N$  は一般に数万から数億のオーダーになるため、

これらの行列から  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  を直接計算することはできない。そこで、行列  $A$  を低ランク近似した行列  $\tilde{A}$  を扱うことを考える。 $\tilde{A}$  を計算するため、 $X$  を特異値分解によってランク数  $r$  で、

$$X \approx U_r \Sigma_r V_r^T \quad (5)$$

と低ランク近似する。ここで、 $U_r \in \mathbb{R}^{N \times r}$ 、 $V_r \in \mathbb{R}^{M \times r}$  は左、右特異ベクトルをランク数  $r$  で打ち切った行列を表し、 $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  は値の大きい上位  $r$  個の特異値を対角要素に持つ行列である。 $X$  の低ランク近似により、行列  $\tilde{A}$  は

$$\tilde{A} = U_r^T X' V \Sigma_r^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad (6)$$

と計算できる。求める  $A$  の固有値  $\lambda_k$  と固有ベクトル  $\boldsymbol{\varphi}_k \in \mathbb{R}^N$  は、 $\tilde{A}$  の固有値  $\tilde{\lambda}_k$  と固有ベクトル  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \in \mathbb{R}^r$  を用いて、

$$\boldsymbol{\varphi}_k = X' V_r \Sigma_r^{-1} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k, \quad (7)$$

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k, \quad (8)$$

と計算される。式 (7) のように固有ベクトルを計算することで、式 (1) を満たす作用素  $A$  の固有ベクトルと一致させようとするのが、Exact DMD である。固有ベクトル  $\boldsymbol{\varphi}_k$  は発達または減衰するモードの空間分布を表し、成長率  $\sigma_k$  と周波数  $f_k$  は、

$$\sigma_k = \frac{\operatorname{Real}\{\log(\tilde{\lambda}_k)\}}{\Delta T}, \quad (9)$$

$$f_k = \frac{\operatorname{Imag}\{\log(\tilde{\lambda}_k)\}}{\Delta T}, \quad (10)$$

と計算できる。ただし、 $\operatorname{Real}(\cdot)$  と  $\operatorname{Imag}(\cdot)$  はそれぞれ複素数の実部と虚部を表す。

### 2.2 作用素に基づく時間依存モード分解の定式化

先行研究 [13] において、系の時間変化を追跡する方法として、時間依存作用素を考えるアイデアが提案されている。すなわち、時刻  $t_i$  における作用素は、その時刻の速度場に対して、

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t_i) = A(t_i) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i), \quad (11)$$

を満たす。任意の時刻  $t$  の作用素の固有値  $\lambda_k(t)$  と固有ベクトル  $\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}, t)$  を計算すると、各時刻のモードが計算でき、モードの時間変化を得ることができる。この時、流れ場は、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_k \beta_k(t) e^{i\lambda_k(t)} \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}, t), \quad (12)$$

と表される。ここで、 $\beta_k(t)$  は、時刻  $t$  におけるモードの振幅である。

式 (11) を満たす作用素の固有ベクトルを計算するために、DMD では、作用素によって関係づけられる複数

のスナップショットを用意する必要がある。しかし、過渡流れにおいては、ある時系列データが与えられても、作用素が時事刻々と変化するため、それらのスナップショットをデータセットに用いることができない。すなわち、時間方向にスナップショットを増やすことができない。このため、いくつかの研究では、初期擾乱などを振り分けることで、複数の過渡流れの時系列データを取得する方法が利用されている [2, 10, 11]。これは初期擾乱のように新たなパラメータを導入することで、そのパラメータ方向にスナップショットを拡張していると見ることができる。そこで、本研究ではそれを一般化し、スナップショットを特徴づけるパラメータを  $\alpha$  とおく。そして、 $\alpha$  の値に応じて流れ場を変化させる関数を  $\mathcal{T}_\alpha^t$  と書く。この変換を用いると、時刻  $t$  の作用素を特徴づけるスナップショットデータが

$$\begin{aligned} X(t) &= [\mathbf{u}(t), \mathcal{T}_{\alpha_1}^t\{\mathbf{u}(t)\}, \dots, \mathcal{T}_{\alpha_M}^t\{\mathbf{u}(t)\}], \\ X(t) &= [\mathbf{u}'(t), \mathcal{T}_{\alpha_1}^t\{\mathbf{u}'(t)\}, \dots, \mathcal{T}_{\alpha_M}^t\{\mathbf{u}'(t)\}], \end{aligned} \quad (13)$$

とかける。通常の時系列データに対する DMD の場合、 $\alpha$  は時間であり、 $\mathcal{T}_\alpha^t$  は  $\alpha$  だけ、位相を進める変換などが対応する。

作用素を表現するためにスナップショットが満たすべき条件について考察する。今、速度場  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{u}$  に対し、式 (11) を満たす作用素の固有ベクトルを計算する場合を考える。このとき、 $X$  と  $X'$  が時刻  $t$  の力学系の作用素に対し、

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (14)$$

を満たすためには、

$$\mathcal{T}_\alpha^t(\mathbf{u}') = A(t)\mathcal{T}_\alpha^t(\mathbf{u}), \quad (15)$$

となる必要である。 $\mathbf{u}'$  は式 (11) を満たすため、変換  $\mathcal{T}_\alpha^t$  は、

$$\mathcal{T}_\alpha^t(A(t)\mathbf{u}) = A(t)\mathcal{T}_\alpha^t(\mathbf{u}), \quad (16)$$

を満たす必要がある。これを満たす変数  $\alpha$  と対応する変換を見つけ、時刻  $t$  における流れ場  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{u}'(t)$  から、行列  $X$  及び  $X'$  を構築すれば、DMD によってその時刻の固有ベクトルと固有値が計算できる。

一連の時系列データを扱う場合、作用素  $A$  によって時間進行された速度場は、次の時刻のスナップショットに等しいため、

$$\mathbf{u}(t_{i+1}) = \mathbf{u}'(t_i), \quad (17)$$

が成り立つ。この時、式 (15) 及び式 (17) より

$$\mathcal{T}_\alpha^{t_i}(\mathbf{u}(t_{i+1})) = A(t_i)\mathcal{T}_\alpha^{t_i}(\mathbf{u}(t_i)), \quad (18)$$

となる。この式を繰り返し適用すると、時刻  $t_i$  の速度場は、

$$\mathcal{T}_\alpha^{t_i}(\mathbf{u}(t_i)) = \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} A(t_j) \right\} \mathcal{T}_\alpha^{t_1}(\mathbf{u}(t_1)), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\alpha^{t_i}(\mathbf{u}'(t_i)) &= A(t_i)\mathcal{T}_\alpha^{t_i}(\mathbf{u}(t_i)) \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^i A(t_j) \right\} \mathcal{T}_\alpha^{t_1}(\mathbf{u}(t_1)), \end{aligned} \quad (20)$$

のように、初期場  $\mathbf{u}(t_1)$  と  $t_1$  における変換  $\mathcal{T}_\alpha^{t_1}$ 、及び作用素  $A(t)$  を使って表せる。

時刻  $t$  における作用素を近似する方法として、time-stepping 法を導入する。すなわち、 $\mathcal{T}_\alpha^{t_1}(\mathbf{u}(t_1))$  を用意し、数値計算によって時間発展させることで、任意の時刻の速度場を得る。得られた速度場から、任意の時刻の固有ベクトルを計算する。初期場を用意するための、変換  $\mathcal{T}_\alpha^{t_1}$  の選び方は一意ではないが、本研究では、速度場が一对の固有ベクトルを用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_\Delta(\mathbf{x}, t) \\ &+ \gamma(t)\boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x}, t) + \gamma(t)\boldsymbol{\phi}_k^*(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (21)$$

と表される時、

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\alpha^t\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} &= \mathbf{u}_\Delta(\mathbf{x}, t) \\ &+ e^{ai}\gamma(t)\boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x}, t) + e^{-ai}\gamma(t)\boldsymbol{\phi}_k^*(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (22)$$

となる変換を用いる。ここで、 $\gamma(t)$  は、モードの結合係数である。 $\boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x}, t)$  が  $A(t)$  の固有ベクトルであることを用いれば、式 (16) を満たすことは容易に確かめられる。なお、 $\boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{x}, t_1)$  には、 $\mathbf{u}_\Delta$  をベースフローに用いた全体安定性解析において、成長率が最大の固有ベクトルを用いる。また、この変換はフーリエ変換を用いた位相シフトでも達成できる。これらの計算過程の概要は Fig. 1 の通りである。

### 3 円柱周り流れを用いた数値実験

Time-stepping 法による時間依存モード分解を過渡的な成長を伴う流れに適用する。本研究では、円柱周り流れを例に用いる。

#### 3.1 数値計算結果

モード分解を適用する前に、円柱周り流れの数値計算を示す。なお、数値計算法の詳細は、文献 [14, 15]などを参照されたい。Fig. 2 にレイノルズ数 100 の円柱周り流れにおいて、一様流を初期条件として非定常数値計算を行った時の、 $(x, y) = (1D, 0)$  における速度ベクトルの絶対値の時間履歴と、 $t = 40, 60, 80, 160$  における速度場を示す。速度ベクトルの絶対値の時間履歴を見ると、 $t = 20-60$  の計算初期に、一時的に、速

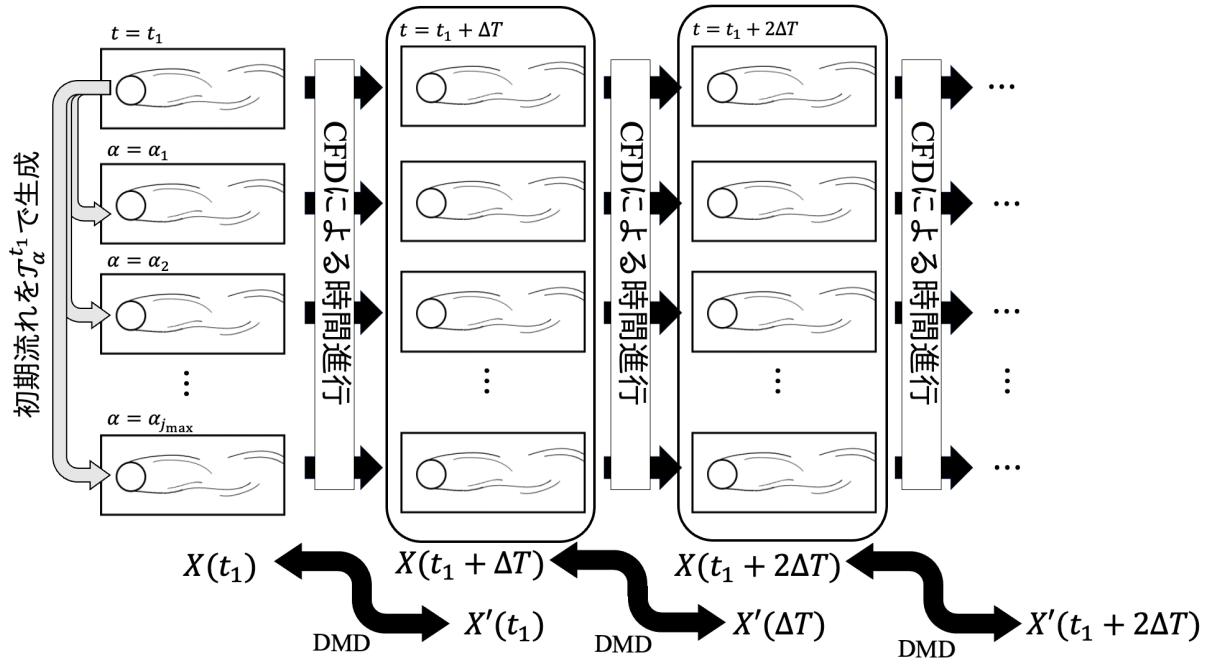


Fig. 1 Conceptual diagram of time-varying DMD for transient process with time-stepping approach.

度ベクトルの時間変化が小さくなる。この時、円柱後方  $y = 0$  において対称な双子渦が形成されている。その後、 $(x, y) = (1D, 0)$  における速度ベクトルは徐々に振動を始める。時間とともに振動の振幅は成長し、最終的に振幅が一定の周期的な流れとなる。この振動は、 $y = 0$  に対して非対称な分布をもつカルマン渦である。本研究では、この振幅が成長し、周期的な流れに移行する過程のモード分解を行う。

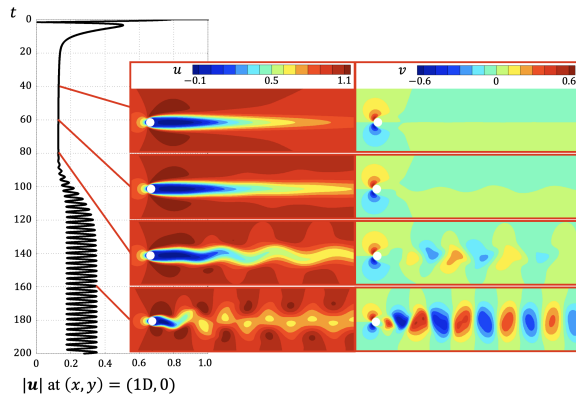


Fig. 2 Time history of absolute value of velocity vector at  $(x, y) = (1D, 0)$  and velocity fields at  $t = 40, 60, 80$ , and  $160$ .

### 3.2 時間依存モード抽出

初期時刻における  $\mathcal{T}_\alpha^I$  を計算するために、初期時刻の作用素の固有ベクトル  $\phi_k(\mathbf{x}, t_1)$  を得る必要がある。本研究では、数値計算を利用した time-stepping 法

に基づく全体安定性解析 [6, 7] を用いて、 $\phi_k(\mathbf{x}, t_1)$  を得る。全体安定性解析におけるベースフローは、Fig. 2 の  $t = 40$  における流れ場のように、非定常な渦が成長する前の定常な流れである。なお、この定常な流れは、 $y = 0$  に対称境界を設定した数値計算で取得した。ベースフロー及び、全体安定性解析で得られた固有モードの実部を Fig. 3 に示す。固有モードは、対称なベースフローから成長する非対称な分布を捉えていることがわかる。

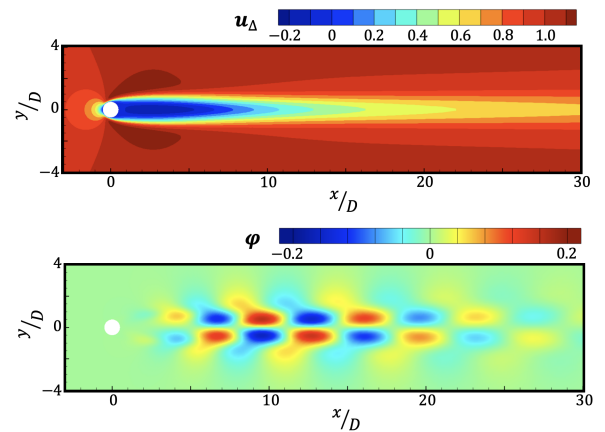


Fig. 3 Base flow and eigenmodes of time-stepping global stability analysis.

次に、得られた固有ベクトルとベースフローを用いて、式 (21) のように速度場を計算する。ただし、初期振幅  $\gamma(t_1)$  は、time-stepping 法による全体安定性解析

での、擾乱の大きさと同じになるよう、ベースフローの  $L2$  ノルムの  $0.1\%$  で設定した。用意した  $\mathbf{u}(t_1)$  に対し、 $\mathcal{I}_\alpha^t$  を適用することで、 $t = t_1$  におけるデータセットを計算した。 $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  の時の固有ベクトルの等値線を Fig. 4 に示す。 $\alpha$  によって、モードの位相が変化することがわかる。本研究では、 $\alpha$  を  $j_{\max}$  個に、

$$\alpha_j = 2 \frac{j-1}{j_{\max}} \pi, \quad (23)$$

と、等間隔に離散化する。すなわち、各時刻における作用素の固有ベクトルを計算するためのスナップショット数は  $j_{\max}$  である。本研究では、 $j_{\max} = 20$  とした。

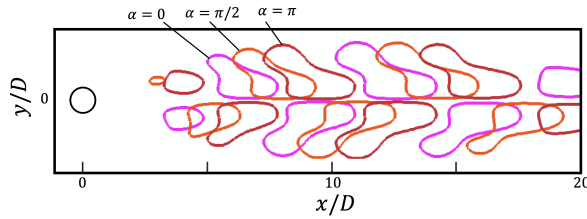


Fig. 4 Initial perturbation fields for different  $\alpha$ .

変換された速度場を数値計算ソルバーに入力し、 $t = t_1 = 0$  から  $t = 150$  まで時間進行させた。数値計算による時間進行は、時間変化する作用素を繰り返し作用させることに対応するため、この過程は、式 (19) 及び式 (20) に対応する。得られた  $j_{\max}$  個の時系列データから、同じ時刻のスナップショット及び次の時刻のスナップショットを取り出し、DMD によって、その時刻の固有モードの抽出を行った。なお、過渡過程におけるスナップショットのサンプリング間隔  $\Delta T$  は  $0.1$  とした。なお、これは DMD における時間幅と同じである。Fig. 5 に  $t = 30, 40, 55, 80$  における DMD モードの固有値分布を示す。 $t = 30$  では、ほとんどの固有値は単位円の外側にあり、正の成長率をもつ。それらの固有値は、時間が進むにつれて、成長率が  $0$  である単位円に近づいていき、最終的に単位円上に位置する。これは、モードが成長し、周期流れに落ち着くという過渡的な現象を表現している。

同じ時刻の固有値の偏角に着目すると、ほとんどの固有値は、最も偏角の小さいものの整数倍の偏角を持っている。したがって、周期流れにおける高調波的性質が、過渡的成長過程においても満たされていることがわかる。また、最も低周波数の固有値の高調波にない固有値は単位円の内側に分布している。このような固有値に対応するモードは、その周波数の特徴を捉えるのに十分な数のスナップショットがないために、非物理的な特徴を示していると考えられる。すなわち、 $j_{\max}$  をより大きく設定することで、高周波のモードも抽出

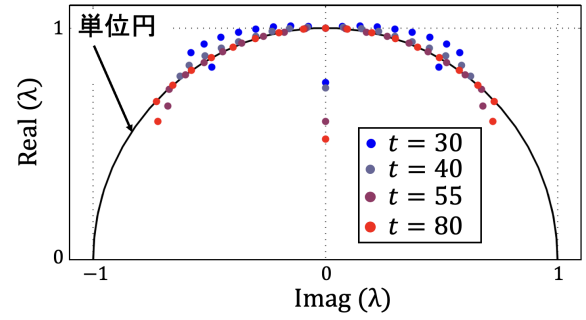


Fig. 5 Time variation of eigenvalue distribution.

できると考えられる。ただし、ここでいう周波数や成長率は、DMD における最適な線形近似、式 (4) から得られるものであり、空間の局所的な値とは必ずしも一致しないことは注意が必要である。

最も低周波数のモードの成長率の時間変化を Fig. 6 に示す。時刻  $0$  における成長率は、全体安定性解析で得られる成長率と一致する。成長初期は成長率の変化はなく、しばらく時間が経つと徐々に成長率が減少し、最終的に成長率は  $0$  となる。これは、不安定な固有モードが成長し、周期流れにおける安定なリミットサイクルへと変化していく過程を表している。

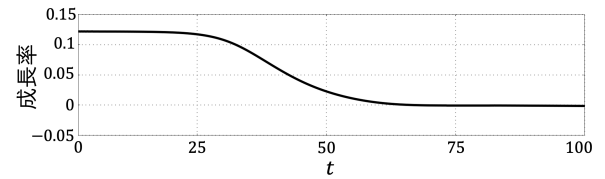


Fig. 6 Time variation of growth rate for lowest-frequency component.

Fig. 7 に  $t = 30, 40, 55, 80$  における最も低周波数のモードとその二倍波のモード分布を示す。また、各分布には、 $0$  周波数成分における速度が  $0$  の等値線を黒線でプロットしている。いずれのモードにおいても、時間変化とともに空間分布の変化が確認される。 $t = 30$  の分布は、Fig. 3 の固有モードの空間分布と似た分布を持っている。 $t = 80$  のモード分布は、円柱周りの周期流れに対する DMD で得られる固有モード [5] と一致している。抽出されたモードの変化は、2つの状態の間の連続的な変化を捉えており、モード分解の妥当性がわかる。また、円柱後流の再循環領域を示す、黒線の  $0$  等値線に着目すると、固有モードにおける非対称分布は、再循環領域周辺で起こることがわかる。時間が進むにつれて再循環領域は小さくなっていき、固有モードの分布もそれに伴って前進する。この固有モード分布の前進が成長率の減少と関係していると考えられる。

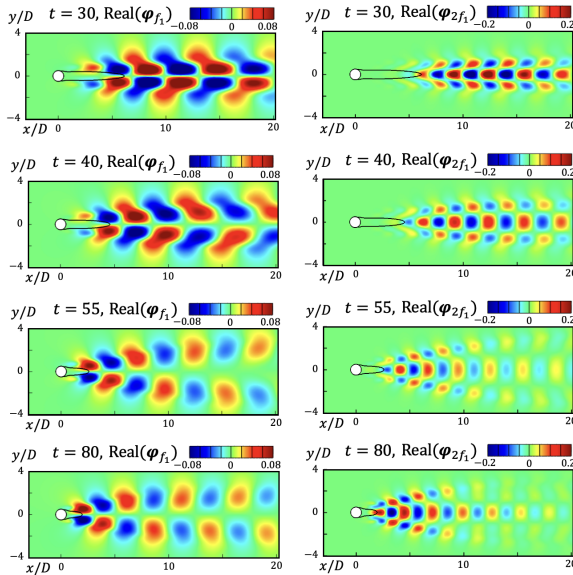


Fig. 7 Time variation of mode distribution. The left panel shows the fundamental frequency mode, while the right panel displays its harmonic doublet.

#### 4 結言

本研究では、作用素の時間変化の導入により、過渡流れを時間依存モードへ分解することが可能であることを示した。データ駆動型のモード分解のため、過渡成長過程における特定の時刻の作用素に対し、データセットが満足すべき条件を定式化した。これに基づいて、数値計算で作用素を近似する time-stepping 法によるデータ取得法を新たに定式化した。

定式化したモード分解を用いて、円柱後流でカルマン渦が成長する過程を時間依存モードに分解した。この分解によって、後流で不安定な非対称渦放出がはじまり、周期的な渦放出へと変化する過程における、成長率、周波数の変化や固有モード分布の変化を得ることができる。今後、このモード分解法を実践的な流れに適用し、過渡成長過程でおこる乱流遷移などのメカニズム解明やその抑制への活用を目指していく。

#### 謝辞

本研究の数値計算は、東北大学流体科学研究所未来流体情報創造センターの次世代融合研究システム (AFI-NITY) 及び、JAXA スーパーコンピュータシステム JSS3 を用いて行った。本研究は、日本科学協会の笹川科学研究助成による助成を受けて実施された。また、本研究の一部は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2114 の支援を受けたものである。

#### 参考文献

- [1] J. L. Lumley et al., eds. A. M. Yaglom and V. I. Tatarski, Nauka (1967) 166–178.
- [2] O. T. Schmidt, P. J. Schmid, J. Fluid Mech. 867 (2019) R2.
- [3] P. J. Schmid, J. Fluid Mech. 656 (2010) 5–28.
- [4] J. H. Tu, Ph. D. Thesis (2013).
- [5] K. Taira et al., AIAA J. 55 (2017) 4013.
- [6] R. Ranjan et al., J. Comp. Phys. 403 (2020) 109076.
- [7] Y. Ohmichi, Ph. D. Thesis (2014).
- [8] L. N. Trefethen, Science 261 (1993) 578–584.
- [9] L. V. Rolandi et al., Theor. Comput. Fluid Dyn. 38 (2024) 604–609.
- [10] A. Amiri-Margavi et al., J. Fluid Mech. 1001 (2024) A22.
- [11] Y. Zhong et al., J. Fluid Mech. 1006 (2025) A18.
- [12] Y. Ohmichi, Aerosp. Sci. Technol. 149 (2024) 109162.
- [13] H. Zhang et al., SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 18 (2019) 1586–1609.
- [14] Y. Nakamura et al., Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 432 (2024) 117340.
- [15] Y. Nakamura et al., arXiv:2504.00896 (2025).