

1B04 量子アニーリングを用いた空力形状最適化

○久谷雄一 (九州大学), 田中龍 (東北大学)

Aerodynamic design optimization by quantum annealing

Yuichi Kuya (Kyushu University), Ryo Tanaka (Tohoku University)

Key Words: Quantum annealing (QA), Aerodynamic design optimization, Topology optimization, Factorization machine (FM)

Abstract

This study proposes an aerodynamic shape optimization method based on quantum annealing black-box optimization. In quantum annealing black-box optimization, the model parameters of quantum annealing models, QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization) and Ising, are approximated using machine learning methods. The proposed method yields aerodynamic shapes that outperform the initial samples in a two-dimensional validation test. In particular, a machine-learned quantum annealing model based on Ising model yields a better solution than the one based on QUBO model. The study also demonstrates that incorporating a regularization method helps prevent overfitting during the machine learning process and contributes to maintaining the geometric continuity of the airfoils obtained by quantum annealing.

1 諸言

航空輸送需要のさらなる増加と地球環境への懸念から、既存の航空機と比較して、石油消費量、炭素排出量、および騒音を削減するより効率的な空力特性を備えた航空機の開発が重要である。特に翼型と翼形状の設計最適化は航空機の空力性能だけでなく安全性の観点からも重要であり、これまでも多くの空力形状最適化手法が提案されている [1–3]。

既存の空力形状最適化手法は、形状最適化 (shape optimization) とトポロジー最適化 (topology optimization) に大別できる。形状最適化は、流体領域と固体領域の境界を移動変形させることで固体領域を最適化する手法であり、大域的に複数のパレート最適解を見つけるのに優れている。また形状最適化はさらに随伴型最適化とサロゲートモデル型最適化に分類される。随伴型最適化手法では、随伴法と勾配法の組み合わせが広く用いられており、空力および流体問題の最適化に対してその有用性が実証されている [4–6]。一方で、サロゲート型最適化手法では、polynomial response surface, radial basis function, kriging などのサロゲートモデルが流体計算 (CFD, computational fluid dynamics) の代替として効果的に用いられている [7–11]。またさらに近年では、従来のサロゲートモデリング手法に加えてニューラルネットワークをサロゲートモデル

として用いる手法も提案されている [12–14]。

他方、トポロジー最適化は固体要素の分布を最適化することにより、形状最適化と比較してより高い自由度を有した最適化手法となっている。トポロジー最適化はもともと構造設計の最適化 [15] を目的に提案されたものであり、現在ではその応用範囲は空力および流体問題に拡張されている [16–23]。一方で高い設計自由度を持つトポロジー最適化では設計変数の数が多くなるため、大域的なパレート最適解の探索が難しくなる。

このような既存の最適化手法のトレードオフの関係に対して、本研究では量子アニーリングを導入することにより問題の改善に取り組む。例えば Ye et al. [24] や Sukulthanasorn et al. [25] は構造トポロジーの最適化に量子アニーリングを用いた手法を提案している。量子アニーリングでは以下の式で表されるような Ising モデルもしくは QUBO (quadratic unconstrained binary optimization) モデルと呼ばれる形式で記述されたコスト関数を最小化する σ_i もしくは q_i の組み合わせを最適解として得ることが出来る。

Ising モデル

$$E(\{\sigma_i\}) = \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad \sigma_i \in \{-1, +1\} \quad (1)$$

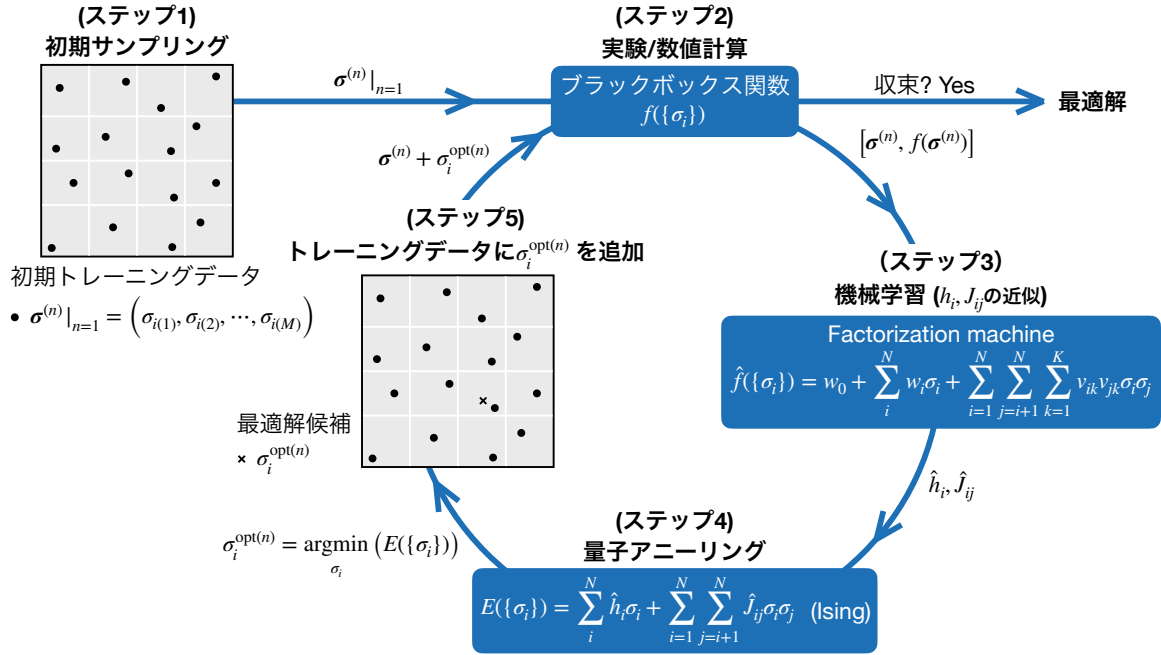


Figure 1: 量子アニーリングブラックボックス最適化の概要.

QUBO モデル

$$E(\{q_i\}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N Q_{ij} q_i q_j, \quad q_i \in \{0, 1\} \quad (2)$$

ここで、 h_i は σ_i に働く局所バイアス、 J_{ij} は σ_i と σ_j の相互作用の強さであり、 Q_{ij} は q_i と q_j の相互作用の強さを表す行列 (QUBO 行列) である。一般に Ising モデルと QUBO モデルは以下の変換式を用いると等価になる。

$$q_i = \frac{\sigma_i + 1}{2} \quad (3)$$

量子アニーリングの難点の一つとして、個々の問題に対して Ising モデルや QUBO モデルを構築することが必ずしも容易ではない点が挙げられる。この問題に対して、ブラックボックス最適化手法が提案され、これまでに様々な問題に対してその有用性が示されてきた [26–31]。これらの量子アニーリングブラックボックス最適化手法では、モデルパラメータ (Q_{ij}) が機械学習的に近似され、近似されたモデルパラメータによって構築された QUBO モデルを量子アニーリングによって解くことで最適解の探索が行われている。また、我々が知る限り、Ising モデルに対して量子アニーリングブラックボックス最適化が用いられた例はない。量子ゆらぎや量子トンネル効果などの量子力学的な効果により、理想的な量子アニーリングマシンでは

大域的な最適解探索が可能になると期待されている。そこで本研究では、量子アニーリングブラックボックス最適化手法を空力形状最適化に応用することにより、大域的な解探索も可能とするトポロジー最適化手法を提案する。

2 提案手法

2.1 量子アニーリングブラックボックス最適化と提案手法

一般に Ising モデルと QUBO モデルは等価であるため、以下では主に Ising モデルを用いて議論する。Figure 1 に量子アニーリングブラックボックス最適化の概要を示す。量子アニーリングブラックボックス最適化では、未知のブラックボックス関数 $f(\{\sigma_i\})$ を Ising モデルを用いて代替することを考える。量子アニーリングでは Ising モデル (式 (1)) で記述されるコスト関数が解かれる。このモデル式の特徴はモデルパラメータ (h_i および J_{ij}) によって決められるが、視点を変えるとモデルパラメータは入力 σ_i と出力 $E(\{\sigma_i\})$ の関係を決めるものとなっていることがわかる。そこで、入力 σ_i と出力 $E(\{\sigma_i\}) (= f(\{\sigma_i\}))$ のサンプルデータを用いることで未知のモデルパラメータ h_i および J_{ij} の近似を行い、ブラックボックス関数 $f(\{\sigma_i\})$ の代替とする。

具体的には、Figure 1 に示されている通り、スッテ

プ1として M 個の初期トレーニングデータの入力値 $\sigma^{(n)}|_{n=1} = (\sigma_{i(1)}, \sigma_{i(2)}, \dots, \sigma_{i(m)})$ を決定し、ステップ2でそれらの入力値に対して実験や数値計算を行うことで M 個の入力値と出力値のトレーニングデータのペア $[\sigma^{(n)}, f(\sigma^{(n)})]_{n=1}$ を作成する。ここで、後述の通り、本手法では収束解を得るために反復が行われるため、 n はその反復回数を示すインデックスである。次にステップ3では、これらのトレーニングデータのペアを用いて h_i および J_{ij} の近似を機械学習的に行う。このときの回帰関数として本研究では Factorization machine [32] を用いる (Factorization machine の詳細については後述)。次にステップ4において、機械学習によって予測された近似モデルパラメータ \hat{h}_i および \hat{J}_{ij} を用いて Ising モデルを構築し、量子アニーリングによる最適解の探索を行う。このとき得られた解 $\sigma_i^{\text{opt}(n)} = \underset{\sigma_i}{\operatorname{argmin}} (E(\{\sigma_i\}))$ は十分に $f(\{\sigma_i\})$ を近似した Ising モデルから得られた解であるとは限らないため、ステップ5として量子アニーリングで得られた解も最適候補としてトレーニングデータの入力に追加し、追加の実験や数値計算を行うことで新たなサンプルデータ $[\sigma_i^{\text{opt}(n)}, f(\sigma_i^{\text{opt}(n)})]$ を得る。最終的に量子アニーリングによって出力される結果が収束するまでステップ2からステップ5を繰り返す。

提案手法では、Ising モデルにより空力形状と空力性能 (例えば揚力、効力、揚効比 L/D など) との関係を表す未知のブラックボックス関数の代替を行う。具体的には、ステップ2において数値流体計算手法の一つである埋め込み境界法を用いることで固体セルと流体セルをそれぞれ $\sigma_i = +1$ (固体セル), $\sigma_i = -1$ (流体セル) として表現し、数値計算結果から得られた空力性能結果 $f(\sigma^{(n)})$ とそれに対応する空力形状 $\sigma^{(n)}$ を用いて、モデルパラメータ h_i および J_{ij} の学習を行う。既存の最適化手法と比較して、提案手法は理想的な量子アニーリングマシンを用いた場合に大域的最適解の探索が加速され、複数のパレート最適解が得られるという利点がある。

2.2 Factorization machine

量子アニーリングブラックボックス最適化において広く用いられる Factorization machine は以下のような

式で表される。

$$\begin{aligned} \hat{f}(\{\xi_i\}) &= w_0 + \sum_i^N w_i \xi_i + \sum_{i < j}^N W_{ij} \xi_i \xi_j \\ W_{ij} &= \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \\ &= \sum_{k=1}^K v_{ik} v_{jk} \quad (K \ll N) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\xi_i = \sigma_i$ (Ising) もしくは $\xi_i = q_i$ (QUBO) である。この回帰式の特徴は、相互作用係数 W_{ij} が $K(\ll N)$ 次元ベクトル同士の内積 $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ で与えられる点にある。これにより相互作用係数の学習に必要なパラメータの数が $N \times N$ から $N \times K$ に削減される。また特徴量が QUBO モデルのように 0 と 1 で表される場合には、 ξ_i もしくは ξ_j のいずれかが 0 になる可能性が高く、その場合には $\xi_i \xi_j = 0$ となるため直接 W_{ij} を学習することは困難になる。一方で、Factorization machine のように W_{ij} をベクトル同士の内積 $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ で得る場合には、例えば $\xi_i \xi_j = 0$ であったとしても、トレーニングデータの中で $\xi_i \xi_m \neq 0$ ($m \neq j$) となるデータがあれば少なくとも ξ_i に対する \mathbf{v}_i の学習は可能となる。同様に、他のトレーニングデータの中で $\xi_m \xi_j \neq 0$ ($m \neq i$) となるデータがあれば ξ_j に対する \mathbf{v}_j の学習も可能となるため、直接 W_{ij} を学習することは困難である状況でも \mathbf{v}_i と \mathbf{v}_j を用いることで間接的に W_{ij} の学習が可能となる。

2.3 正則化

損失関数 L は以下のように実際の値と予測値との誤差平方和として定義する。

$$L := \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M [f(\{\xi_{i(m)}\}) - \hat{f}(\{\xi_{i(m)}\})]^2 + \frac{\lambda}{2} \|\theta\|_2^2 \quad (5)$$

ここで θ は学習パラメータ (w_i , W_{ij} , \mathbf{v}_i)、第二項は正則化項、 λ は正則化項のハイパーパラメータである。検証計算では提案手法における正則化の効果についても議論する。

3 検証問題と解析

提案手法の検証問題として二次元単翼素翼型の L/D (揚効比) に対する空力形状最適化を考える。流れのレイノルズ数およびマッハ数はそれぞれ $\text{Re}=100$, $\text{M}_\infty=0.2$ であり、迎角は 4° とする。埋め込み境界法には圧縮性流れに拡張された Brinkman ペナルティ法 [33] を用いる。非粘性項および粘性項の離散化にはそれぞれ 2 次精度 KEEP スキーム [34,35] と 2 次精

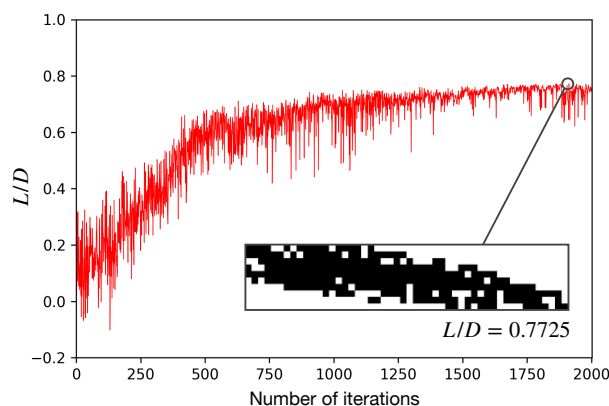
度中心差分を，時間発展には 3 段 3 次 TVD ルンゲ・クッタ法を用いる．埋め込み境界付近から生じる高周波の圧力振動を抑えるために，8 次精度陽的フィルタ [36] を用いている．

量子アニーリングには Python ライブラリである OpenJij [37] を用い，シミュレート量子アニーリングとして問題の求解を行う．ブラックボックス最適化では回帰式として Factorization machine を用いる．先行研究では QUBO モデルを用いて量子アニーリングブラックボックス最適化が行われているが，ここでは Ising モデルと QUBO モデルの両モデルに対して検証を行う．また本検証問題では式 (5) 第二項の正則化項の効果についても議論する．初期サンプルとして，NACA4 桁翼型から 50 個の形状をランダムに作成する．Figure 2 に初期サンプル中で最も L/D が高い形状 ($L/D=0.7576$) を示す．

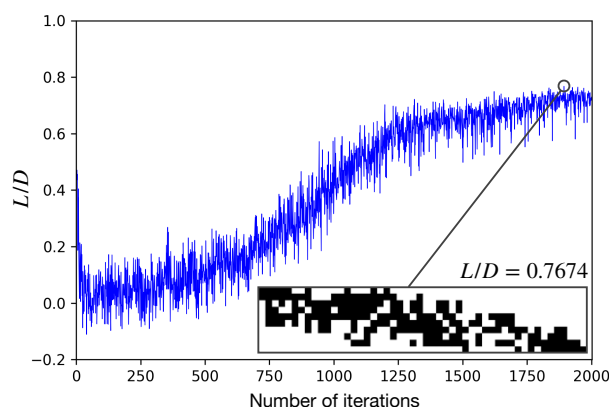
Figures 3 および 4 にそれぞれ正則化を用いない場合と用いた場合の最適化結果を示す．図の縦軸と横軸はそれぞれ L/D と量子アニーリングブラックボックス最適化のステップ 2 から 5 までの反復回数を示している．正則化を用いない場合，QUBO モデル，Ising モデルともに初期サンプルよりも高い L/D を得る形状が求められており，反復回数 2000 回ほどで概ね出力結果が収束していることがわかる．また，QUBO モデルと Ising モデルが示した最適形状は異なるが， L/D の値は近いものとなっている．しかし，最適化で得られた形状は固体セルが若干バラけたものとなっている．これに対し正則化を用いた場合には，固体セルの分散が抑えられ，単翼素翼型とわかるような一つの塊とし最適形状が得られている．また正則化を用いることで収束にいたる反復回数も 2000 回から 100 回以下に大幅に減少している．正則化を用いない場合には QUBO モデルと Ising モデルが求めた最適形状の L/D 値は概ね同等であったが，正則化を用いには Ising モデルが $L/D=0.8598$ という本検証計算において最も L/D が高い翼型形状を得ているだけでなく，逆に QUBO モデルが得た翼型形状は初期サンプルデータよりも低い L/D のものとなっている．



Figure 2: 初期サンプル中で最も L/D が高い形状 ($L/D=0.7576$).



(a) QUBO モデル.



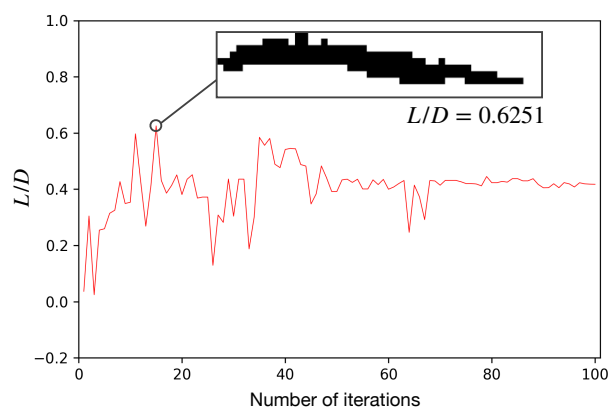
(b) Ising モデル.

Figure 3: 正則化を用いない場合の最適化結果.

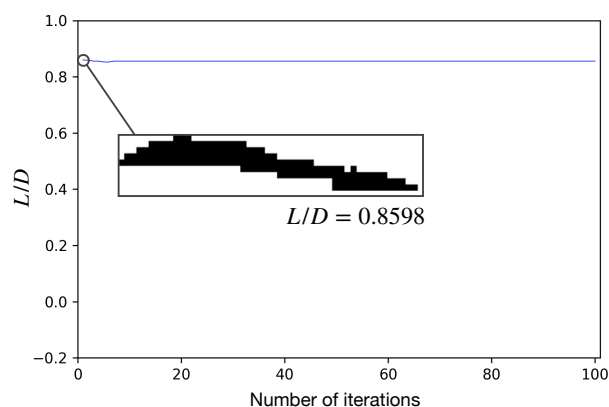
以下では，

- なぜ正則化を用いると固体セルの分散が抑えられるか
- (正則化を用いた場合に) なぜ Ising モデルが QUBO モデルよりもより良い最適化結果を導出したか

についてそれぞれ考察を行う．Figure 5 に正則化の有無で比較した Factorization machine のパラメータ w_i の分布を示す．パラメータ分布を取り囲んでいる黒線はトレーニングデータ中に固体セルが存在していた領域を示している．正則化の主な目的は機械学習過程での過学習を防ぐことであるが，正則化の有無でパラメータ分布を比較すると，正則化を用いない場合には w_i が黒線で囲まれた領域内で散逸的に分布していることがわかる．これは正則化を用いない場合に， w_i がすべてのトレーニングデータに対して対応出来るように過学習された結果であり，翼型形状が散逸的原因と考えられる．



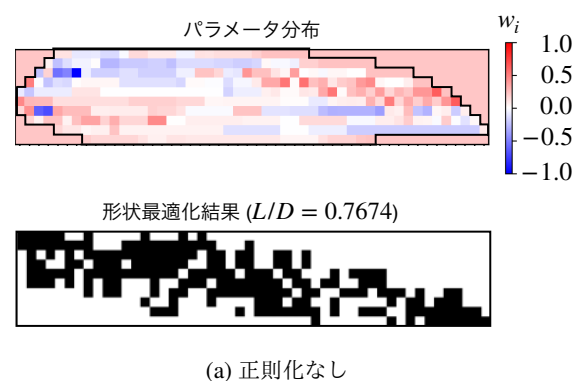
(a) QUBO モデル.



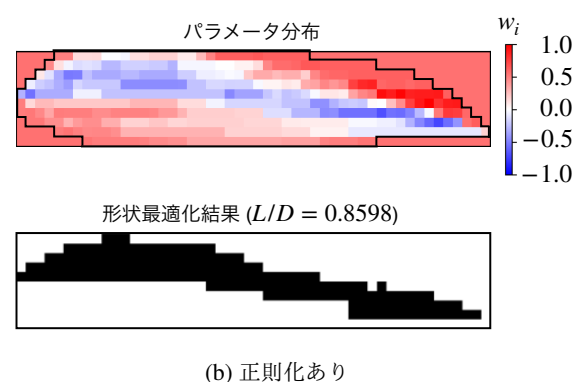
(b) Ising モデル.

Figure 4: 正則化を用いた場合の最適化結果.

次に、正則化を用いた場合に Ising モデルが QUBO モデルよりもより良い最適化結果を出した理由を考察する．一般に、Ising モデルと QUBO モデルは式 (3) を通じて等価になるが、これは Ising モデルと QUBO モデルが陽的に与えられた場合であり、量子アニーリングブラックボックス最適化のように機械学習的に推定された場合には、両者が等価になる保証はない．Table 1 に二値パラメータ (σ_i および q_i) に対するモデルパラメータの学習の可否を示す．機械学習過程では Factorization machine の w_i および W_{ij} の学習が行われるが、その際に QUBO モデルの場合には $q_i=0$ となる場合には $w_i q_i=0$ となるため w_i の学習が行えない．これは W_{ij} に対しても同様で、 $q_i=0$ もしくは $q_j=0$ となる場合には $W_{ij} q_i q_j=0$ となるため W_{ij} の学習が行えないことになる．一方で、Ising モデルで学習を行った場合の特徴量は $\sigma=-1$ もしくは $+1$ であるため、どちらの値をとってもモデルパラメータの学習が可能となる．Factorization machine では W_{ij} を直接学習する代わりに v_i の学習を行うことで $q_i q_j=0$ となるような特



(a) 正則化なし



(b) 正則化あり

Figure 5: 正則化の効果 (Ising モデル). パラメータ分布を取り囲んでいる黒線はトレーニングデータ中に固体セルが存在していた領域を示している．

微量に対しても学習効率の改善を図っているが、前述の $q_i q_m \neq 0$ ($m \neq j$) および $q_m q_j \neq 0$ ($m \neq i$) となるようなデータがトレーニングデータ中に存在しない場合には W_{ij} の学習は行えず、Table 1 より、Ising モデルと比較して QUBO モデルは特に W_{ij} の学習効率が著しく悪いことがわかる．よって、QUBO モデルと比較してより学習効率の高い Ising モデルがより良い最適形状を求めたと考えられる．

4 結言

本研究では、量子アニーリングブラックボックス最適化手法を空力形状最適化に応用することで、大域的な解探索も可能とするトポロジー最適化手法を提案した．量子アニーリングブラックボックス最適化では量子アニーリングモデルである QUBO モデル、および Ising モデルのモデルパラメータを機械学習によって予測する．検証問題では二次元単翼素翼型の L/D (揚効比) に対する空力形状最適化を行った．提案手法は初期サンプルよりもより L/D が高い翼型形状を導出

Table 1: 二値パラメータ (σ_i および q_i) に対するモデルパラメータの学習の可否.

| (a) QUBO モデル | | | | |
|--------------|-------|-----------|-------|----------|
| q_i | q_j | $q_i q_j$ | w_i | W_{ij} |
| 0 | 0 | 0 | × | × |
| 0 | 1 | 0 | × | × |
| 0 | 1 | 0 | ✓ | × |
| 1 | 1 | 1 | ✓ | ✓ |

| (b) Ising モデル | | | | |
|---------------|------------|---------------------|-------|----------|
| σ_i | σ_j | $\sigma_i \sigma_j$ | w_i | W_{ij} |
| -1 | -1 | 1 | ✓ | ✓ |
| -1 | 1 | -1 | ✓ | ✓ |
| 1 | -1 | -1 | ✓ | ✓ |
| 1 | 1 | 1 | ✓ | ✓ |

している. この際, 正則化を導入することにより機械学習過程での過学習が抑制されることが示された. また, QUBO モデルと Ising モデルは陽的に与えられた場合には等価であるが, 機械学習的にモデルが与えられた場合には等価にならないだけでなく, 両モデルで使用される特徴量の違いから, Ising モデルの方が量子アニーリングブラックボックス最適化により適しているモデルであることが示された.

理想的な量子アニーリングマシンを用いると量子力学的な効果により大域的な最適解探索が可能になると期待されているが, 現状の量子アニーリングマシンはノイズによるエラーも生じるだけでなく, 扱える問題の規模もまだそれほど大きくはない. しかし, 量子アニーリングマシンの性能は年々向上しているだけでなく, Ising モデルや QUBO モデルを解くことに特化したスパコン(シミュレーテッド量子アニーリングマシン) [38–40] も開発されている. そのため提案手法は必ずしも次世代の量子アニーリングマシンを必要とするものではなく, 大規模なシミュレーテッド量子アニーリングマシンを用いることで早急な実用化が期待される.

謝辞

本研究の一部は JAXA 航空イノベーションチャレンジ 2024 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] Joaquim RRA Martins. Aerodynamic design optimization: Challenges and perspectives. *Computers & Fluids*, Vol. 239, p. 105391, 2022.

[2] Jichao Li, Xiaosong Du, and Joaquim RRA Martins. Machine learning in aerodynamic shape optimization. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 134, p. 100849, 2022.

[3] Soledad Le Clainche, Esteban Ferrer, Sam Gibson, Elisabeth Cross, Alessandro Parente, and Ricardo Vinuesa. Improving aircraft performance using machine learning: A review. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 138, p. 108354, 2023.

[4] Zhoujie Lyu, Gaetan KW Kenway, and Joaquim RRA Martins. Aerodynamic shape optimization investigations of the common research model wing benchmark. *AIAA journal*, Vol. 53, No. 4, pp. 968–985, 2015.

[5] Gaetan KW Kenway, Charles A Mader, Ping He, and Joaquim RRA Martins. Effective adjoint approaches for computational fluid dynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 110, p. 100542, 2019.

[6] Justin S Gray, Charles A Mader, Gaetan KW Kenway, and Joaquim RRA Martins. Coupled aeropropulsive optimization of a three-dimensional boundary-layer ingestion propulsor considering inlet distortion. *Journal of Aircraft*, Vol. 57, No. 6, pp. 1014–1025, 2020.

[7] Wenbin Song and Andy J Keane. Surrogate-based aerodynamic shape optimization of a civil aircraft engine nacelle. *AIAA journal*, Vol. 45, No. 10, pp. 2565–2574, 2007.

[8] Yuichi Kuya, Kenji Takeda, Xin Zhang, and Alexander IJ Forrester. Multifidelity surrogate modeling of experimental and computational aerodynamic data sets. *AIAA journal*, Vol. 49, No. 2, pp. 289–298, 2011.

[9] Daisuke Sasaki and Kazuhiro Nakahashi. Aerodynamic optimization of an over-the-wing-nacelle-mount configuration. *Modelling and simulation in engineering*, Vol. 2011, No. 1, p. 293078, 2011.

[10] Sohail R Reddy, Helmut Sobieczky, George S

- Dulikravic, and Abas Abdoli. Multi-element winglets: Multi-objective optimization of aerodynamic shapes. *Journal of Aircraft*, Vol. 53, No. 4, pp. 992–1000, 2016.
- [11] Chihiro Fujio and Hideaki Ogawa. Physical insight into axisymmetric scramjet intake design via multi-objective design optimization using surrogate-assisted evolutionary algorithms. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 113, p. 106676, 2021.
- [12] Gang Sun, Yanjie Sun, and Shuyue Wang. Artificial neural network based inverse design: Airfoils and wings. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 42, pp. 415–428, 2015.
- [13] Zhaoyi Xu, Joseph H Saleh, and Vigor Yang. Optimization of supercritical airfoil design with buffet effect. *AIAA journal*, Vol. 57, No. 10, pp. 4343–4353, 2019.
- [14] Jichao Li and Mengqi Zhang. Data-based approach for wing shape design optimization. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 112, p. 106639, 2021.
- [15] Martin Philip Bendsøe and Noboru Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.
- [16] Thomas Borrvall and Joakim Petersson. Topology optimization of fluids in stokes flow. *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 41, No. 1, pp. 77–107, 2003.
- [17] Shiwei Zhou and Qing Li. A variational level set method for the topology optimization of steady-state Navier–Stokes flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 24, pp. 10178–10195, 2008.
- [18] Yongbo Deng, Zhenyu Liu, Ping Zhang, Yongshun Liu, and Yihui Wu. Topology optimization of unsteady incompressible Navier–Stokes flows. *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, No. 17, pp. 6688–6708, 2011.
- [19] Kentaro Yaji, Takayuki Yamada, Masato Yoshino, Toshiro Matsumoto, Kazuhiro Izui, and Shinji Nishiwaki. Topology optimization in thermal-fluid flow using the lattice boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 307, pp. 355–377, 2016.
- [20] ADJ Payot, TCS Rendall, and CB Allen. Restricted snakes volume of solid (rsvs): A parameterisation method for topology optimisation of external aerodynamics. *Computers & Fluids*, Vol. 182, pp. 60–84, 2019.
- [21] Naohiko Ban and Wataru Yamazaki. Black-box function aerodynamic topology optimization algorithm via machine learning technologies. *AIAA Journal*, Vol. 59, No. 12, pp. 5174–5185, 2021.
- [22] Ming Liu and Yosuke Hasegawa. Adjoint-based shape optimization for radiative transfer using level-set function and volume penalization method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 210, p. 124158, 2023.
- [23] Naruhiko Nimura and Akira Oyama. Multiobjective evolutionary topology optimization algorithm using quadtree encoding. *IEEE Access*, 2024.
- [24] Zisheng Ye, Xiaoping Qian, and Wenxiao Pan. Quantum topology optimization via quantum annealing. *IEEE Transactions on Quantum Engineering*, Vol. 4, pp. 1–15, 2023.
- [25] Naruethep Sukulthanasorn, Junsen Xiao, Koya Wagatsuma, Reika Nomura, Shuji Moriguchi, and Kenjiro Terada. A novel design update framework for topology optimization with quantum annealing: Application to truss and continuum structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 437, p. 117746, 2025.
- [26] Koki Kitai, Jiang Guo, Shenghong Ju, Shu Tanaka, Koji Tsuda, Junichiro Shiomi, and Ryo Tamura. Designing metamaterials with quantum annealing and factorization machines. *Physical Review Research*, Vol. 2, No. 1, p. 013319, 2020.
- [27] Blake A Wilson, Zhaxylyk A Kudyshev, Alexander V Kildishev, Sabre Kais, Vladimir M Shalaev, and Alexandra Boltasseva. Machine learning framework for quantum sampling of highly constrained, continuous optimization problems. *Applied Physics Reviews*, Vol. 8, No. 4, 2021.
- [28] Tadayoshi Matsumori, Masato Taki, and Tadashi Kadowaki. Application of qubo solver using black-

- box optimization to structural design for resonance avoidance. *Scientific Reports*, Vol. 12, No. 1, p. 12143, 2022.
- [29] Kenji Nawa, Tsuyoshi Suzuki, Keisuke Masuda, Shu Tanaka, and Yoshio Miura. Quantum annealing optimization method for the design of barrier materials in magnetic tunnel junctions. *Physical Review Applied*, Vol. 20, No. 2, p. 024044, 2023.
- [30] Seongmin Kim, Su-Jin Park, Seunghyun Moon, Qiushi Zhang, Sanghyo Hwang, Sun-Kyung Kim, Tengfei Luo, and Eungkyu Lee. Quantum annealing-aided design of an ultrathin-metamaterial optical diode. *Nano Convergence*, Vol. 11, No. 1, p. 16, 2024.
- [31] Junsen Xiao, Katsuhiko Endo, Mayu Muramatsu, Reika Nomura, Shuji Moriguchi, and Kenjiro Terada. Application of factorization machine with quantum annealing to hyperparameter optimization and metamodel-based optimization in granular flow simulations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 48, No. 13, pp. 3432–3451, 2024.
- [32] Steffen Rendle. Factorization machines. In *2010 IEEE International conference on data mining*, pp. 995–1000. IEEE, 2010.
- [33] Qianlong Liu and Oleg V Vasilyev. A brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 2, pp. 946–966, 2007.
- [34] Yuichi Kuya, Kosuke Totani, and Soshi Kawai. Kinetic energy and entropy preserving schemes for compressible flows by split convective forms. *Journal of Computational Physics*, Vol. 375, pp. 823–853, 2018.
- [35] Yuichi Kuya and Soshi Kawai. High-order accurate kinetic-energy and entropy preserving (keep) schemes on curvilinear grids. *Journal of Computational Physics*, Vol. 442, p. 110482, 2021.
- [36] Hiroyuki Asada and Soshi Kawai. Conservative low-pass filter with compact stencils for hierarchical cartesian mesh. *Computers & Fluids*, Vol. 252, p. 105769, 2023.
- [37] Openjij, <https://www.openjij.org>, accessed 8 April 2025.
- [38] Fujitsu Digital Annealer, <https://jpn.nec.com/nec-vector-annealing-service/index.html>, accessed 15 May 2025.
- [39] NEC Vector Annealing, <https://jpn.nec.com/nec-vector-annealing-service/index.html>, accessed 15 May 2025.
- [40] TOSHIBA SQBM+, <https://www.global.toshiba/jp/products-solutions/ai-iot/sbm.html>, accessed 15 May 2025.