

## 2E02 DNSの境界層遷移予測を取り込んだ

### 壁面モデルLESによる翼型周り流れの解析

○玉置義治, 今村太郎（東京大学）

Wall-modeled LES of airfoil flow incorporating transition prediction by DNS

Yoshiharu Tamaki and Taro Imamura (the University of Tokyo)

Key Words : Boundary Layer, Transition, LES

#### Abstract

A hybrid simulation method combining wall-modeled large-eddy simulation (WMLES) and direct numerical simulation (DNS) is proposed for analyzing the airfoil stall phenomenon. The DNS is solved in the region near the leading edge to reproduce the development of the boundary layer including laminar-turbulent transition. Furthermore, an external force term is introduced into the WMLES so that the velocity and turbulence kinetic energy matches those obtained by the DNS. The simulation of the flows around the Aerospacial A-Airfoil at a near-stall condition is conducted for the validation. The results show that the hybrid simulation methodology reproduces the boundary layer development and aerodynamics more accurately compared to the conventional WMLES that does not use the external force term. Also, the computational cost at the high Reynolds number condition ( $Re_c = 1.0 \times 10^7$ ) is less than 1/100 of that of the wall-resolved LES.

#### 1. 序論

航空機周り流れのような高レイノルズ数流れでは、粘性散逸で決まる流れ場の最小長さスケールと流れ場の代表長さのスケールの間に大きな差が存在する。そのため、この2つを同時に格子で解像するような計算(直接数値シミュレーション: DNS)は工学的に非現実的なコストを要する。そこで、粘性スケールよりも大きい積分長スケールのみを解像するLarge eddy simulation (LES)により、計算コストの低減が期待できる。しかし、壁乱流では物体近傍で積分長スケールが粘性散逸スケールと近くなってしまう、LESでさえ莫大な計算コストを要する。例として、筆者らが近年実施した航空機実機に近いレイノルズ数( $Re_c = 1.0 \times 10^7$ )における翼型周りのLES [1]では、コード長の約5%のスパン領域長さに対して382億点もの格子点数を要した。よって、実機全体のLESを行う上では、抜本的な計算コスト低減が必要である。

このような問題に対し、壁面近傍の境界層内層を壁モデルで再現する壁面モデルLES [2, 3]が注目されている。境界層内層は対数則のような普遍法則が成り立つ場合が多く、モデル化が比較的容易である。一方、壁から離れた領域はLESとして計算するため、流れ場への寄与度の大きい境界層外層の非定常な渦は、モデルに頼ることなく再現される。これにより、壁モデルを用いないLESと比べて、精度を維持しつつコスト削減が可能である。また、壁面モデルLESでは壁面近傍の格子幅を比較的粗く設定するため、時間刻み

を大きく設定できるという利点もある。

しかし、壁面モデルLESの大きな課題として、物体前縁近傍の解像度不足が挙げられる。壁面モデルLESでは壁面近傍の格子幅を比較的粗く設定するため、物体前縁付近の薄い層流境界層の発達やその後の境界層遷移は再現困難である。境界層遷移は物体前縁近傍のごく小領域で起こる現象ではあるが、特に失速付近の翼型では境界層遷移の影響が後縁に向けて増幅することが示されており[1, 4]、失速の正確な予測のためにはその再現が不可欠である。過去の翼型周り流れの壁面モデルLESでは、物体前縁で強制的に[4, 5]、もしくはセンサーを用いて[6]層流・乱流の壁モデルを切り替えるような方法、突起物によって境界層の乱流化を促進する手法[7, 8]が用いられているが、このような手法が翼型前縁近傍の境界層発達を正しく捉えられるかは不明である。

そこで本研究では、境界層遷移近傍の領域のみをDNS、翼型全体を壁面モデルLESで解くハイブリッド計算手法を提案する。ただし、単純に両者をオーバーセットして計算するのでは、時間方向のスケール分離が不十分である。そこで、DNSで計算した境界層内の平均速度や乱流強度の分布を壁面モデルLESに体積力を用いてフィードバックすることにより、全時間長さにおいてDNSを解く必要がなくなり、計算コストのさらなる低減が見込まれる。本稿では、このハイブリッド計算手法の構築と、翼型周り流れにおける実証計算について述べる。

2. 計算対象

本研究では、Aerospatial A-airfoil周りの失速点近傍における流れ場を計算する．この流れ場については、過去に風洞試験[9]およびWall-resolved LES [1, 10, 11] (壁面モデルを使わないLES)が実施されている．迎角 $\alpha = 13.3^\circ$ ，マッハ数 $M = 0.15$ であり，壁面は断熱条件を仮定する．また，翼弦長および一様流速に基づくレイノルズ数 $Re_c$ については， $2.1 \times 10^6$ および $1.0 \times 10^7$ の2条件を比較する．

3. 数値計算法

3. 1. 計算格子

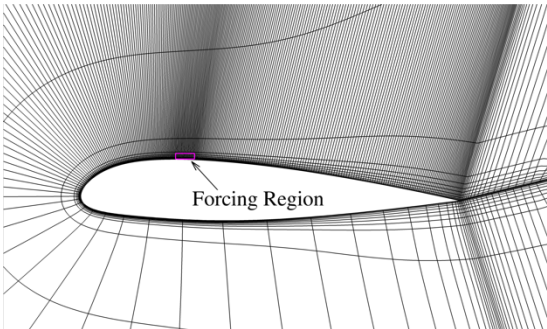
壁面モデルLESの計算格子は図1(a)に示すC型構造格子であり，レイノルズ数によらず共通である．格子点数は3,298 (コード方向)×250 (スパン方向)×135 (壁面垂直方向)であり，壁面垂直方向の最小格子幅は $1.2 \times 10^{-4}c$  ( $c$ はコード長)，外部領域サイズは $160c$ ，スパン方向領域サイズは $0.05c$ である．なお，このスパン方向領域サイズについては，過去の研究[1]で十分な値であることが確認できている．粘性スケールによる壁面垂直方向最小格子幅は図2に示した通りであり，粘性底層を解像しない格子となっている．

また，DNSは図1 (b)の領域のみを計算する．DNS領域の外部境界は翼型から約 $1c$ 離れた位置に存在しており，下面は淀み点よりやや下流の20%コード位置まで，上面は32%コード位置までをカバーする．DNS領域の格子(図1 (c))はレイノルズ数によって異なり，それぞれ過去のWall-resolved LES [1]とほぼ同様である(表1)．なお，これらのWall-resolved LESでは，どちらのレイノルズ数においても遷移点が格子によってほぼ変わらないことを確認できしており，遷移近傍に関してはほぼDNSの解像度を持つことが確認できている．また，スパン方向領域サイズは出口境界における境界層厚みの30倍程度の値とする(表1参照)．

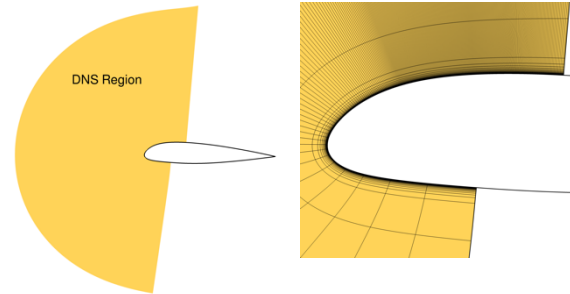
それぞれのレイノルズ数におけるDNS領域の格子幅，スパン幅および格子点数を表1に示す．Wall-resolved LESでは，それぞれ約10億点，380億点の格子が必要であったのと比較すると，壁面モデルLES (1.1億点)と合わせても，格子点数ではそれぞれ約1/3, 1/21にまで削減される．

3. 2. 壁面モデルLESからDNSへのフィードバック

DNSでは，計算領域の境界条件を壁面モデルLESの平均場から与える．具体的には，翼型コード方向の出口境界では，壁面モデルLESで得られる平均圧力を与え，他の物理量はDNS領域内側から外挿する．また，外側境界では，壁面モデルLESの平均密度，流速，圧力を遠方場の値とし，内側から外挿した値と併せてリーマン不変量に基づく遠方境界条件を構成する．



(a) 壁面モデルLES計算格子



(b) DNS領域 (c) DNS計算格子 ( $Re_c = 2.1 \times 10^6$ )

図1 計算格子の概要(10点おきに表示)および領域設定

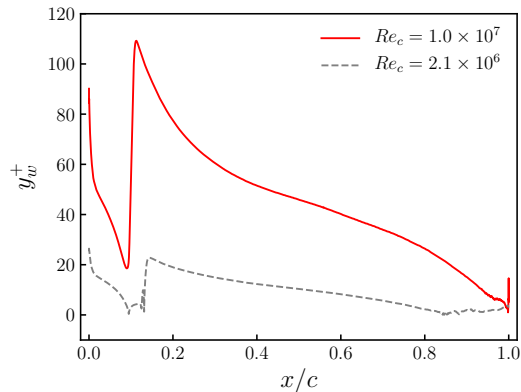


図2 壁面モデルLES格子における粘性スケールによる壁面垂直方向最小格子幅(LES結果[1]を元に計算)

表1 DNS計算格子

$Re_c$	$2.1 \times 10^6$	$1.0 \times 10^7$
壁面垂直方向最小格子幅	$4.0 \times 10^{-6}c$	$1.0 \times 10^{-6}c$
スパン方向格子幅	$7.2 \times 10^{-5}c$	$1.5 \times 10^{-5}c$
スパン幅	$2.16 \times 10^{-2}c$	$1.35 \times 10^{-2}c$
各方向格子点数 (コード×スパン×壁面垂直)	2,698×300×216	7,906×900×252
総格子点数	2.2億	18億

3. 3. DNSから壁面モデルLESへのフィードバック

DNSから壁面モデルLESへは，翼型上面上のある位置における平均速度と乱流運動エネルギーの境界層内

プロファイルを受け渡す。この位置は、格子が境界層を十分解像できる(境界層厚みあたり20点程度の格子点が存在する)ように選定する。本研究では、受け渡し位置を $x/c = 0.3$ とする。壁面モデルLESにおいては、DNSで得られた30%コード位置での平均速度、TKEプロファイルが得られるように、図1(a)に示す上面25～30%コード長の領域に外力付加を行う。

壁面モデルLESでは、DNSで与えられるプロファイルを再現するような外力項を文献[12]に従って与える。この外力項は次式で与えられる。

$$f_i = Au'_i + B_i \quad (1)$$

ここで、 $Au'_i$ は乱流運動エネルギー、 $B_i$ は平均速度をターゲット値に近づける効果を持つ。なお、 $A$ をマトリックスで与えることでレイノルズ応力の各成分をターゲットに近づける方法も文献[12]では提案されているが、本研究では簡単のため乱流運動エネルギーのみをターゲットとする。

式(1)の各成分は以下で与えられる。

$$A = \frac{1}{2\tau_r} \left( \frac{K^\dagger}{K} - 1 \right) \quad (2)$$

$$B_i = \frac{1}{\tau_f} (u_i^\dagger - \langle u_i \rangle) \quad (3)$$

ただし、 $u'_i \equiv u_i - \langle u_i \rangle$ 、 $K \equiv \langle u'_i u'_i \rangle / 2$ であり、 $(\cdot)^\dagger$ は入力として与えるターゲット値を示す。 $\langle \cdot \rangle$ は一様方向の何らかの平均を表しており、本研究ではスパン平均を用いるが、スパン一様でない流れ場の場合、時間方向の移動平均等が用いられる。また、 $\tau_r$ 、 $\tau_f$ は緩和時間であり、本研究では $\tau_r = \tau_f = 7.5 \times 10^{-4} c / u_\infty$ とする。これはこの位置での99%境界層厚み分の距離を境界層外縁の流れが通過する時間の約0.1～0.2倍に相当する。文献[12]におけるチャネル流れの計算では、境界層厚みをチャネル半幅と読み替えると、同程度の値が採用されている。

また、文献[12]の方法を実際の翼型上の流れに適用するために、以下の3点の修正を加える。1点目は、外力項の分布に関する修正であり、式(1)を

$$f_i = (Au'_i + B_i)F_a F_b \quad (4)$$

と変更する。ここで、

$$F_a = 0.5 - 0.5 \tanh \left( \frac{5(d - d_{99}^\dagger)}{d_{99}^\dagger} \right) \quad (5)$$

であり、 $d$ は壁面距離、 $d_{99}^\dagger$ はターゲットとする平均速度プロファイルにおける99%境界層厚みである。この関数は外力付加を境界層内に限定する。また、

$$F_b = (x - x_{\text{str}}) / (x_{\text{end}} - x_{\text{str}}) \quad (6)$$

であり、 $x_{\text{str}}$ 、 $x_{\text{end}}$ はそれぞれ外力付加領域の開始、終了点の $x$ 座標(本研究ではそれぞれ0.25 $c$ 、0.3 $c$ )を示す。 $F_b$ は、外力の付加開始点で急に大きな外力が流れ場に付加されないようにする役割を持つ。2点目の修正は、流れ場の変動がない場合において、式(2)の $A$ が

無限大になることを防止することである。具体的には、式(2)を

$$A = \frac{1}{2\tau_r} \left( \frac{K^\dagger}{K + \varepsilon} - 1 \right) \quad (7)$$

と変更する。ただし、 $\varepsilon = 10^{-8} u_\infty^2$ である。3点目は、流れ場が静止している場合から外力付加を開始した場合、forcing領域全体が周期を揃えて振動する現象の回避である。このために、式(3)を

$$B_i = \frac{1}{\tau_f} (u_i^\dagger - \langle u_i \rangle + u_{\text{random},i}) \quad (8)$$

と変更する。ただし、 $u_{\text{random},i}$ は $[-0.01u_\infty, 0.01u_\infty]$ の一樣乱数である。

### 3. 4. その他の計算手法

壁面モデルLESでは、乱流壁関数[13]を用いて壁面せん断応力を境界条件として与える。壁関数のマッチ点は壁面から5点目を使用した。なお、乱流壁関数は上面 $x/c > 0.25$ の領域のみに適用し、それより上流側および下面は層流を仮定した線形速度分布により壁面せん断応力を求める。

空間差分は壁面モデルLES、DNSともに6次精度コンパクトスキーム[14]で計算し、8次精度コンパクトフィルタ[15]を用いて高周波成分を取り除く。時間積分については壁面モデルLESでは3段3次Runge-Kutta法[16]、DNSでは2点後退差分を用いる陰解法[17, 18]を用いる。時間刻み幅はそれぞれ、 $\Delta t u_\infty / c = 6.0 \times 10^{-6}$ 、 $1.08 \times 10^{-5}$ である。また、壁面モデルLESにおけるサブグリッドスケール乱流応力はselective mixed-scaleモデル[19]で与える。

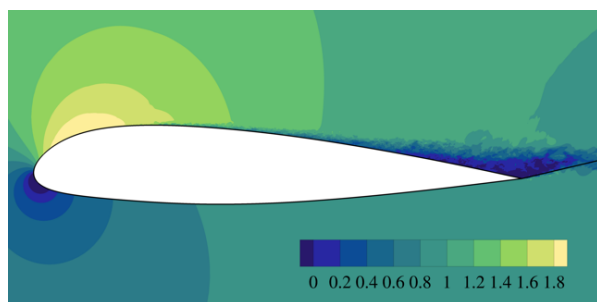
### 3. 5. 計算の流れ

本計算ではまず、体積力を用いない壁面モデルLES(Full WMLES)を実施し、計算が準定常になってから平均場の取得を行う。次に、この平均場を外部境界条件として与えたDNSを実施する。DNSでは、計算が準定常になってから平均場を取得した。さらに、このDNSの平均場から抽出した境界層プロファイルを用いて壁面モデルLESを実施する。このDNSと壁面モデルLESの反復は最大2回に渡って実施し、両者の境界面で圧力と境界層厚みが一致することを確認する。なお、最終的な平均場の取得時間長さは壁面モデルLESは $T_{\text{ave}} u_\infty / c = 2.7$ であり、DNSは $Re_c = 2.1 \times 10^6$ で $T_{\text{ave}} u_\infty / c = 0.3$ 、 $Re_c = 1.0 \times 10^7$ で $T_{\text{ave}} u_\infty / c = 0.15$ である。

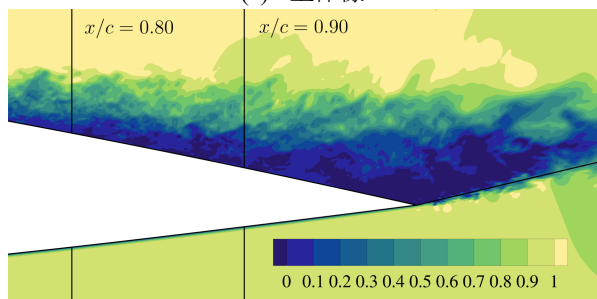
なお、比較計算およびハイブリッド計算の初期場として実施するFull WMLESでは、遷移位置は過去のWall-resolve LES[1]に基づき事前に与える。具体的には、 $Re_c = 2.1 \times 10^6$ および $1.0 \times 10^7$ でそれぞれ0.14、0.1とする。

#### 4. 結果

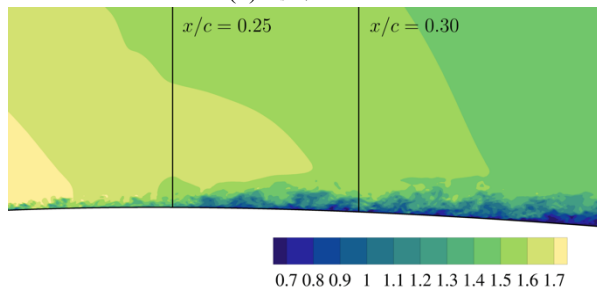
図3に $Re_c = 2.1 \times 10^6$ でのハイブリッド計算における壁面モデル領域内の主流速度分布瞬時値の分布を示す．図3(a)に示されるように，壁面上面で乱流境界層が発達し，後縁近傍では剥離を生じる(図3(b))．これは過去の計算[1, 10, 11]における結果と一致した傾向である．また，図3(c)に示す外力付加領域( $0.25 < x/c < 0.3$ )を通過すると，境界層が厚くなり変動が増すことが確認できる．また，図4にDNS領域内における遷移点近傍の主流速度分布瞬時値の分布を示す． $x/c \approx 0.14$ では層流剥離泡の再付着に伴う乱流遷移が見られる．一方，図5に示すFull WMLESにおける同位置での主流方向速度分布では，境界層が薄くなっており，乱流渦の発生も遷移を指定した(壁関数を切り替えた)位置よりも後流側となっている．これは，格子解像度が不足して，層流境界層の成長が正しく捉えられていないためであると考えられる．



(a) 全体像



(b) 後縁近傍



(c) 外力付加領域近傍

図3 ハイブリッド計算における壁面モデルLES領域内の主流方向速度 $u/u_\infty$ の分布( $Re_c = 2.1 \times 10^6$ )

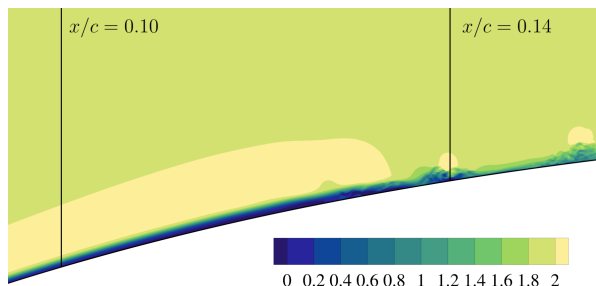


図4 ハイブリッド計算におけるDNS領域内の主流方向速度 $u/u_\infty$ の分布( $Re_c = 2.1 \times 10^6$ )

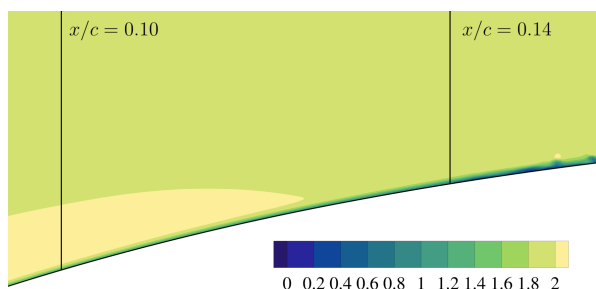


図5 Full WMLESにおける遷移点近傍での主流方向速度 $u/u_\infty$ の分布( $Re_c = 2.1 \times 10^6$ )

次に，図6に平均場における境界層内の主流方向速度および乱流運動エネルギー(TKE)の分布を示す．ハイブリッド計算では，各位置で速度・TKEの双方で参照解のWall-resolved LESと良い位置が見られる．一方で，Full WMLESは特に後流位置で境界層厚みを過小評価する．また，図7に $Re_c = 2.1 \times 10^6$ における表面圧力係数 $C_p$ および翼上面における摩擦係数 $C_f$ ，翼上面境界層の排除厚み $\delta^*$ を示す．表面圧力係数分布では，後縁付近での圧力分布を含め，全体的にハイブリッド計算がFull WMLESと比べWall-resolved LESと近い結果を示す．また， $C_f$ ， $\delta^*$ の分布でも，ハイブリッド計算はWall-resolved LESの結果を良く再現している．特に， $\delta^*$ の分布では，過去の研究[1, 4]で示唆されたように，前縁付近で生じたハイブリッド計算・Full WMLES間での境界層排除厚みの差が後縁に向けて増幅し，最終的に無視できない差を生み出していることが確認できる．この後縁での境界層排除厚みの差が，図7(a)に示される後縁付近での圧力回復の差を生み出すと考えられる．

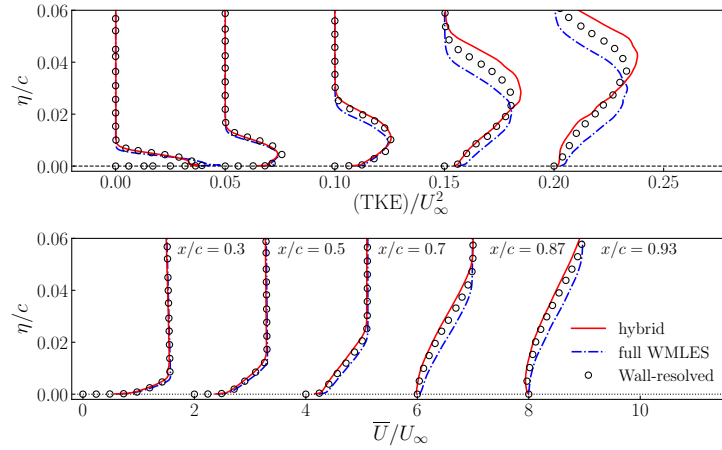


図6 境界層内主流方向平均速度(上)およびTKE(下)の分布( $\eta$ は壁面垂直方向座標を示す)

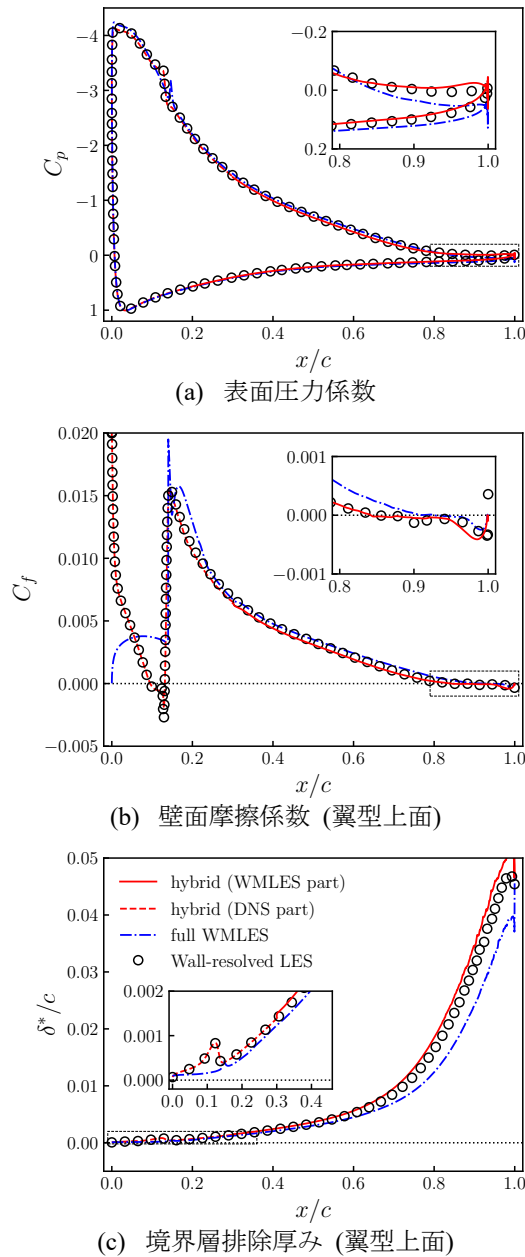


図7 表面圧力係数および翼型上面における壁面摩擦係数・境界層排除厚みの分布 ( $Re_c = 2.1 \times 10^6$ )

次に,  $Re_c = 1.0 \times 10^7$ における $C_p$ ,  $C_f$ ,  $\delta^*$ の分布を図8に示す. ハイブリッド計算のDNS領域では, Wall-resolved LESとほぼ同様の $x/c \approx 0.1$ で乱流遷移が発生する. その後流での $C_f$ ,  $\delta^*$ の分布についてもWall-resolved LESと良い一致が見られる. また, 壁面モデルLES領域では, Wall-resolved LES同様に後縁でほぼ剥離が生じない. さらに,  $C_p$ ,  $\delta^*$ についても, 後縁付近も含めてWall-resolved LESと良い一致を示す. 一方で, Full WMLESは $\delta^*$ を過大評価し,  $x/c \approx 0.95$ で後縁剥離を生じる. これは,  $Re_c = 2.1 \times 10^6$ とは逆に, 前縁付近でやや境界層厚みが過大評価されているためであると考えられる.

最後に, 表2に各ケースの揚力係数の比較を示す. ハイブリッド計算では, レイノルズ数間の揚力の差異を10%以内の精度で予測する. 一方で, Full WMLESはレイノルズ数間の揚力の差異を約60%過小評価しており, 遷移位置を事前情報として与えているにも関わらずレイノルズ数効果の定量予測の点では不十分である. また, Full WMLESにおける翼型前縁付近は格子解像度の不足の影響を受けるため, スキームや壁面モデルの実装, 遷移の指定方法によって異なる挙動を示す可能性があるという問題もある.



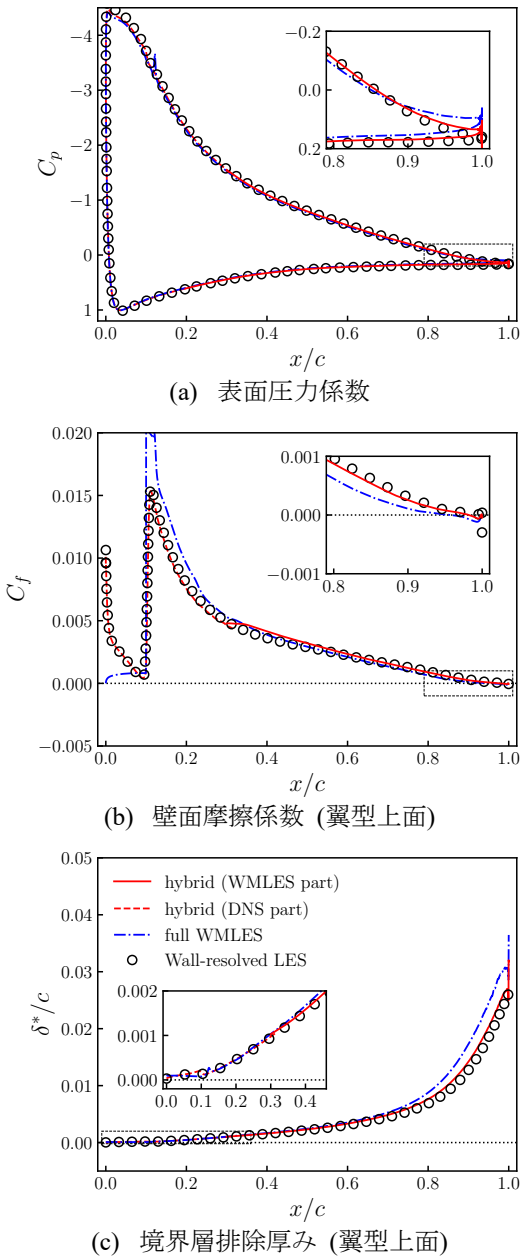


図 8 表面圧力係数および翼型上面における壁面摩擦係数・境界層排除厚みの分布 ( $Re_c = 1.0 \times 10^7$ )

表2 各ケースにおける時間平均揚力係数

$Re_c$	Hybrid	Full WMLES	Wall-resolved [1]
$2.1 \times 10^6$	1.49	1.55	1.52
$1.0 \times 10^7$	1.65	1.61	1.67
Difference	0.16	0.06	0.15

5. 計算コスト

壁面モデルLES, DNSの計算には情報交換の反復が必要であり, Wall-resolved LES [1]との単純な比較は不可能である. ここでは, 平均場取得に必要な計算コストについて比較を行う.

表3および表4に計算格子の格子点数および時間刻

みを示す. なお, 計算コストは格子点数と必要ステップ数の積で計算する. ハイブリッド計算では, それぞれのレイノルズ数でWall-resolved LESと比べて6.4%, 0.56%までコストが削減される. 特に遷移と全場のスケール差が大きな高レイノルズ数のケースで, コスト削減幅が大きくなる. 実際には壁面モデルLESとDNSで繰り返し計算が必要なことを差し引いても, 全体の計算コストとしては $Re_c = 1.0 \times 10^7$ で1/100程度になることが見込まれる. また, ここには示していないが, 翼型周りの流れ場が準定常になるまでの時間も大きく削減される.

表3 計算コストの比較 ( $Re_c = 2.1 \times 10^6$ )

	ハイブリッド計算		Wall-resolved [1]
	壁面モデル LES	DNS	
格子点数	$1.1 \times 10^8$	$8.5 \times 10^7$	$1.1 \times 10^9$
時間刻み 幅 $\Delta t u_\infty / c$	$1.08 \times 10^{-5}$	$6.0 \times 10^{-6}$	$6.0 \times 10^{-6}$
必要ステップ数	$2.5 \times 10^5$	$5.0 \times 10^4$	$4.5 \times 10^5$
コスト	$3.2 \times 10^{13}$		$5.0 \times 10^{14}$

表4 計算コストの比較 ( $Re_c = 1.0 \times 10^7$ )

	ハイブリッド計算		Wall-resolved [1]
	壁面モデル LES	DNS	
格子点数	$1.1 \times 10^8$	$1.8 \times 10^9$	$3.8 \times 10^{10}$
時間刻み 幅 $\Delta t u_\infty / c$	$1.08 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-6}$
必要ステップ数	$2.5 \times 10^5$	$2.0 \times 10^5$	$1.8 \times 10^6$
コスト	$3.9 \times 10^{14}$		$6.9 \times 10^{16}$

6. 結論

本研究では, DNSで計算した乱流遷移を含む境界層の情報壁面モデルLESに外力として付加することで, 計算コストの増大を抑えつつ翼型周り流れの高精度な解析が可能となるハイブリッド計算手法を提案した. 提案手法では, 従来の壁面モデルLESとは異なり, 事前の情報に依存せずに遷移位置を予測できる. 提案手法を用いたハイブリッド計算では, 外力を用いない従来の壁面モデルLESと比べて, 空力やそのレイノルズ数効果をより定量的に予測できることが示された. また, 全場をWall-resolved LESとして解くのに比べると, 計算コストは $Re_c = 1.0 \times 10^7$ において1/100以下にまで低減できることが示された.

謝辞

本研究はJSPS科研費JP23K13491(若手研究)の助成を受けた. また, 学際大規模情報基盤共同利用・共同

研究拠点萌芽型共同研究課題(課題番号: EX24304・EX25306)によって東京大学情報基盤センター Wisteria/BDEC01スーパーコンピュータシステムを利用した。ここに感謝の意を示す。

#### 参考文献

- [1] Tamaki, Y., and Kawai, S., “Wall-resolved large-eddy simulation of near-stall airfoil flow at  $Re_c = 10^7$ .” AIAA Journal 61.2 (2023), pp. 698-711.
- [2] Larsson, J., Kawai, S., Bodart, J., & Bermejo-Moreno, I., “Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions.” Mechanical Engineering Reviews, 3.1 (2016), 15-00418.
- [3] Bose, S. T., and Park, G. I., “Wall-modeled large-eddy simulation for complex turbulent flows.” Annual review of fluid mechanics 50.1 (2018): 535-561.
- [4] Tamaki, Y., Fukushima, Y., Kuya, Y., and Kawai, S., “Physics and modeling of trailing-edge stall phenomena for wall-modeled large-eddy simulation,” Physical Review Fluids, 5.7 (2020), 074602.
- [5] Fukushima, Yuma, and Soshi Kawai. "Wall-modeled large-eddy simulation of transonic airfoil buffet at high Reynolds number." AIAA Journal 56.6 (2018): 2372-2388.
- [6] Bodart, J., and Larsson J., “Sensor-based computation of transitional flows using wall-modeled large eddy simulation.” Center for Turbulence Research Annual Briefs 2012 (2012): 229-240.
- [7] Iyer, P. S., and Malik, M. R., “Wall-modeled LES of the NASA juncture flow experiment.” AIAA SciTech 2020 Forum. 2020, AIAA paper No. 2020-1307.
- [8] Tamaki, Y., and Kawai, S., “Wall-modeled Large-Eddy simulation of transonic buffet over NASA-CRM using FFWHC-ACE.” AIAA Journal 62.7 (2024): 2489-2504.
- [9] Gleyzes, C. and Capbern, P., “Experimental study of two AIRBUS/ONERA airfoils in near stall conditions. Part I: Boundary layers,” Aerosp. Sci. Technol. 7, 439 (2003).
- [10] Mary, I., and Sagaut, P., “Large eddy simulation of flow around an airfoil near stall.” AIAA journal 40.6 (2002): 1139-1145.
- [11] Asada, K., and Kawai, S. “Large-eddy simulation of airfoil flow near stall condition at Reynolds number  $2.1 \times 10^6$ .” Physics of Fluids 30.8 (2018).
- [12] De Laage de Meux, B., *et al.*, “Anisotropic linear forcing for synthetic turbulence generation in large eddy simulation and hybrid RANS/LES modeling.” Physics of Fluids 27.3 (2015).
- [13] Allmaras, S. R., and Johnson, F. T., “Modifications and clarifications for the implementation of the Spalart-Allmaras turbulence model.” Seventh international conference on computational fluid dynamics (ICCFD7), 2012.
- [14] Lele, S. K., “Compact finite difference schemes with spectral-like resolution,” J. Comput. Phys. 103, 16 (1992).
- [15] Gaitonde, D. V., and Visbal, M. R., Padé-type higher-order boundary filters for the Navier–Stokes equations, AIAA J. 38, 2103 (2000).
- [16] Gottlieb, S. and Shu, C.-W., Total variation diminishing Runge-Kutta schemes, Math. Comput. Am. Math. Soc. 67, 73 (1998).
- [17] Obayashi, S., Fujii, K., and Gavali, S., “Navier–Stokes simulation of wind-tunnel flow using LU-ADI factorization algorithm,” Technical Report NASA-TM 10004 (National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC, 1988).
- [18] Izuka, N., Study of Mach number effect on the dynamic stability of a blunt re-entry capsule, Ph.D. thesis, The University of Tokyo, 2006.
- [19] Lenormand, E., Sagaut, P., and Ta Phuoc, L., “Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel flow at moderate Reynolds number.” International Journal for Numerical Methods in Fluids 32.4 (2000): 369-406.