第57回流体力学講演会/
第43回航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム
2025年7月2日〜4日
タワーホール船堀（東京）

JSASS-2025-2032

1D16　２及び３次元の任意の有限体積格子上での局所的な数値粘性

◯ 相曽 秀昭 （宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 客員）

Discussion on Difinition of Local numerical Viscosity in Finite Volume Method for Hyperbolic Conservation Laws over 2- and 3-dimensional space.

by

AISO, Hideaki (Visiting Researcher, JAXA)

Key Words: Conservation law, Convection equation, Numerical Viscosity, Compressible Euler Equations Finite Volume Method, Compressiible Euler Equation

ABSTRACT

We are concerned with the numerical viscosity of finite volume method that is applied to solve hyperbolic conservation laws numerically. The numerical viscosity is closely related with the quality of capturing wave propagation. But the qualitative definition of numerical viscosity is still insufficient. In fact, we do not have such definition in general cases.of the finite volume method to solve two or three dimensional problems using unstructured grids. We discuss how to give a clear qualitative definition of numerical viscosity in such cases above.

1. はじめに

圧縮性 Euler 方程式等の双曲型保存則の有限体積法による数値計算において、波（位置や伝播）の鈍化（少ない程良いとされる）が計算品質の評価指標の一つとされることが多い。数値粘性はこの鈍化の事前評価（計算実行の前の予測）に利用できるほぼ唯一の指標である。

またこれらの方程式の解の数値計算法は先ず独立変数、従属変数共に１次元である空間１次元スカラー方程式を対象として考案され、系（従属変数がベクトル）や空間多次元（本稿では「空間多次元」を空間２次元または３次元に制限する。）に拡張される事が多い。ただ、拡張全てを理論的に行えることは稀で何らかの推論を伴う事が多い。

数値粘性の概念も元来は空間１次元方程式の近似の際に定義される。しかし、空間１次元での計算法の数値粘性による鈍化作用は空間多次元の場合にも当然に継承されるという事情から、空間多次元の場合でも計算品質の議論において数値粘性という用語がしばしば用いられる。そしてこの場合は厳密な定義を与えられずに用いられることが殆どである。しかし鈍化の事前評価の指標として用いるのであれば空間多次元の場合にも何らかの定義を与える事が望まれる。[1]

そこで、本稿では圧縮性 Euler 方程式等の双曲型保存則やそれらの有する移流機構が支配的である高 Reynolds 数 Navier-Stokes 方程式等の数値解における波の鈍化の事前評価指標としての数値粘性に役割に注目し、数値粘性の定義を多次元の有限体積法で非構造格子を含む場合にまで拡張する事を試みる。

[1]ただし、計算品質の定性的な議論と言う意味では、明確な定義が与えられず定量的な議論には向かない感覚的な用語でありながらも概ね妥当に用いられてきたと言えよう。ただ、定義を明確に与えなかった故にある意味誤った俗説が導かれた例もある事には注意したい。[1] はこういった俗説の誤りの一つを明らかにしている。

2. 数値粘性

空間 1 次元スカラー保存則

$$u_t + f(u)_x = 0,\ -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{1}$$

の空間方向の離散化で生じる数値粘性は自然に定義される。実際、有限体積法から得られる保存型差分により空間方向のみ離散化すれば

$$\frac{du_i(t)}{dt} + \frac{\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}(t) - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}(t)}{\Delta x} = 0 \tag{2}$$

となる。Δx は各体積 (区間) の大きさで、差分増分でもある。下添字 i(整数) の用法は通例に従い、$u_i(t)$ で $x = i\Delta x$ における $u(t)$ の値 (近似) を、$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}(t)$ で隣接体積との境界である $x = (i + \frac{1}{2})\Delta x$ における流束の近似を表す。

各 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}(t)$ が

$$\begin{aligned}\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}(t) =& \frac{1}{2}\{f(u_i(t)) + f(u_{i+1}(t))\} \\ & - \frac{1}{2}\bar{a}(u_i(t), u_{i+1}(t))(u_{i+1}(t) - u_i(t))\end{aligned} \tag{3}$$

の様に表され、

$$\lim_{u_\pm \to u} \bar{a}(u_-, u_+) = a(u) \tag{4}$$

である適度に滑らかな関数 $a(u)$ があれば、Δx の 1 次項までを考慮した

$$u_t + f(u)_x = \frac{1}{2}\Delta x \{a(u)u_x\}_x \tag{5}$$

なる修正方程式[2]を (2) から得る。一般には (5) の右辺を数値粘性、$a(u)$ またはそれに相当する各 $\bar{a}(u_i(t), u_{i+1}(t))^3$ を数値粘性係数とする事が多い。

つまり、空間方向のみ離散化して差分増分 Δx の 1 次項までを考慮した修正方程式の粘性項 (Δx の 1 次項でもある) が数値粘性であると考えてよい。また、このようにして考える数値粘性や数値粘性係数の概念は、有限体積法というよりも差分近似に由来して与えられている点にも注意する。

[2]一旦得られた離散式化を差分増分 (ここでは Δx) で Taylor 展開する事で導出される modified equation の直訳として修正方程式なる語を用いた。元の微分方程式と異なり、係数の中に差分増分を含む項が現れる。実際には必要とする次数まで Taylor 展開すればよく、ここでは Δx の 1 次項まで残して 2 次以降の項は誤差として打ち切っている。修正方程式は離散化で得られる数値解の性質の考察に利用できる。

[3]空間と時間の両方を同時に離散化した場合には

$$(x, t) = ((i + \tfrac{1}{2})\Delta x, n\Delta t)$$

における流束の近似を

$$\bar{f}^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\{f(u^n_i) + f(u^n_{i+1})\} - \frac{1}{2}\bar{a}(u^n_i, u^n_{i+1})(u^n_{i+1} - u^n_i) \tag{6}$$

のように記すときの各 $\bar{a}(u^n_i, u^n_{i+1})$ となる。

3. 数値粘性の多次元の有限体積法（一様な格子の場合）への拡張

空間が多次元となった場合でも、波面やその伝播の鈍化を考察するという目的からは、数値粘性に対応する空間方向の 2 階微分項を空間次元の数に合わせて一般化するよりも、平面波の伝播においてどのような鈍化が生じるかを観察する方が合理的である。

つまり平面波が伝播する解を想定し、波面に直交する方向に新たな座標軸をとり、その軸への直交射影により問題を 1 次元化する。その 1 次元化された問題は前節の (1) と同等であろ。

しかし、空間方向の離散化に相当するものは (2) とは様相が異なってくる。有限体積は 1 次元問題の場合には自然に整列しているが、空間多次元問題を 1 次元した場合には、有限体積間の流束のやり取りの関係を新たに定式化する必要がある。また、前節では有限体積の大きさと差分近似の観点から見た差分増分が同一で有限体積（この場合は区間）の中心を差分近似のノード (差分近似の値が与えられる点) とすれば有限体積法と差分近似を自明な形で自然に対応させる事ができたのだが、空間多次元問題の 1 次元化では、有限体積法と差分近似の対応についても自明ではないので考察が必要である。

空間的に一様な格子 (例えば、空間 2 次元では合同な正三角形、正方形または正六角形からなる有限体積が埋めつくしているようなもの) の場合、上記の 2 つの問題は解決可能であり、その結果として差分近似から修正方程式を得る方法論が適用できる。即ち、

- 多次元問題の 1 次元化
- 1 次元化された問題での有限体積法と差分近似の自然な対応

が実現され、その結果、各方向毎の数値粘性を定義できる訳である。この結果については本研究集会における昨年の発表でも言及しているが、数値粘性の一般化の観点から再度確認したい。

4. 数値粘性の一般的な有限体積法への拡張

前節でも述べたが、有限体積法に自然に差分近似を対応させるためには、各有限体積において差分近似のノードに相当する点を定める必要がある。ところが一般的な有限体積分割に場合には各有限体積に中心点もしくはそれに準ずるものの自然な定義は困難である。よって、有限体積法に自然に対応する差

分近似を定めようとすれば、先ず差分のノードに相当する点を与える段階で行き詰まる事になる。

つまり、一般の有限体積法では前節の様に前々節の (5) に基く数値粘性の定義を保ったままでの拡張を考える事は困難 (多分不可能であると予想される) であって、何らかの形で前提条件を緩めることが必要になると思われる。

そこで、本節では、まず 1 次元スカラー問題を近似する有限体積法で不均一な有限体積分割である場合に着目し、自然に対応する差分近似の構成とそれを経由する数値粘性の定義について考察する。次に多次元の有限体積法の場合に数値粘性を定義する方法の考察に進む。この考察を進める過程では理論的な議論の積み重ねだけではなく理論的根拠が不十分な仮定の導入も必要になる。そういった仮定の妥当性について議論しながら、数値粘性の定義の一案を提示したい。

参考文献

[1] 相曽 秀紹. 2 次元保存則の数値計算における平面波捕獲を解析するための 1 次元化モデルの提案 JAXA-RR-22-007. Technical report, 宇宙航空研究開発機構, 2023.