

## 1D04 FR 法における堅牢な等温壁条件 WMLES

○岡野 泰人, 芳賀 臣紀 (JAXA)

Robust WMLES under Isothermal Wall Condition on Flux Reconstruction Scheme

Yasuhito OKANO and Takanori HAGA (Japan Aerospace Exploration Agency)

Key Words : FR, WMLES, Isothermal Wall

### Abstract

A method to enhance the numerical robustness of the Wall-Modeled Large Eddy Simulation (WMLES) under isothermal wall conditions on the Flux Reconstruction (FR) scheme for ideal gas is proposed. The FR scheme suffers from the numerical instability induced by a large temperature gradient near the wall due to a relatively coarse grid used in the WMLES. To overcome this problem, an artificial viscosity (AV) is added to the region close to the wall. The amount of the AV is computed based on the formulation of localized artificial diffusivity, and the profile of the AV for the wall-normal direction in a cell line is given by a linear function and van Driest damping function. We show that the proposed method enables one to conduct the WMLES stably under a very cold wall condition, such as the ratio of the wall temperature and the recovery temperature is 0.1, on the FR.

### 1. 緒言

液体ロケットエンジンや大気圏再突入機では、壁面にかかる熱の予測が設計・開発において非常に重要である。設計段階では、計算コストの低さから Reynolds-averaged Navier-Stokes simulation がよく使われるが、剥離や再付着といった非定常な流れの正確な予測は難しい。一方、非定常な流れを高精度に予測するには、Large Eddy Simulation (LES) が有効である。しかし、Wall-Resolved LES (WRLES) では、特に壁近傍の小スケール乱流を解像する必要があるため、高レイノルズ数流れでは膨大な計算コストが要求される [1]。

この問題を解決する手法として、Wall-Modeled LES[2] (WMLES) が提案されている。WMLES では、境界層外層のみを解像し、内層の効果は壁面に課せん断応力としてモデル化する。そのため、WRLES と比較して必要な格子点数を大きく削減することができる。また、壁面近傍で大きなセルを使用できるため、時間刻み幅を拡大することもでき、計算コストの大幅な削減が実現できる。

他方、複雑な形状への対応、さらにはデータ通信量の少なさによる大規模並列計算への適用性の高さから、近年、Flux Reconstruction (FR) 法 [3, 4] や Discontinuous Galerkin (DG) 法 [5] といった Discontinuous Finite Element Methods (DFEMs) が注目されている。これらの手法は、セル内部に自由度を導入することで空間高次精度を達成するものであり、本研究ではその中でも FR 法に着目する。

WMLES と DFEMs を組み合わせた研究も進展しており、計算空間全体を四面体で分割し、空間高次精度および WM を用いることで NASA's high-lift Common Research Model の空力係数を正確に予測することに成功している [6]。一方で、多項式補間による勾配評価によって振動が生じ、予測精度や数値安定性が劣化

する問題が報告されている [7–9]。特に、内層の急激な物理量の変化を解像しない WMLES においては、この影響が顕著である [7]。有限差分法では、低次精度の片側差分を用いることでこうした誤差を抑制できるが、DFEMs では壁面付近においても高次補間を用いるため、別の安定化手法が必要となる。この問題に対し、Fukushima ら [10] は、勾配計算における境界条件の工夫と壁面隣接セルへの modal filter[11] の適用により、断熱壁条件に対するより堅牢な数値計算手法を提案している。しかし、本研究が対象とする等温壁条件にその手法を適用した場合、一定の安定化効果は得られるものの、極めて低温な壁条件下では計算が破綻することが確認されている。

本研究では、FR 法を用いた理想気体流れに対する WMLES において、非常に低温の等温壁条件下でも安定に数値計算を実行可能とする堅牢な数値計算手法を提案する。具体的には、マッチングポイントよりも壁面側の領域に限定して人工粘性を付加することにより、数値的な安定性を向上させる。

第 2 章では、用いる数値計算法の概要を示し、第 3 章では提案手法の詳細を説明する。第 4 章では数値実験を通じて、壁面温度  $T_w$  と回復温度  $T_r$  の比が 0.1 のような極めて冷却された壁条件においても、提案手法により安定な計算が可能であることを示す。

### 2. 数値計算手法

#### 2-1 支配方程式

本研究では、JAXA で開発中の流体解析ソルバ LS-FLOW-HO[12] を用いて WMLES を実施する。支配方程式は 3 次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式であり、密度  $\rho$ ・運動量  $\rho u_i$ ・全エネルギー  $pe$  の保存則を解く。また、理想気体の状態方程式で方程式系を閉じる。離散化法には FR 法 [3, 4] を用い、その詳細を次節で説明する。

## 2-2 Flux Reconstruction (FR) 法

FR 法は計算セル内に Solution Point (SP) と呼ばれる物理量の定義点を複数持ち、それらを用いた多項式近似により高次精度化を達成する。隣接セルとのデータ通信がセル界面上の値のみなので並列化効率が高い、セル内データの局所性により高速なキャッシュの利用率が上がるなどの利点がある。FR 法は四面体、ピラミッド、プリズムのセル形状にも適用可能であるが、本研究では実装が容易な六面体を用いる。

物理空間  $(x, y, z)$  上の各計算セルを計算空間上  $(\xi, \eta, \zeta) | -1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$  にマッピングし、計算空間上の各座標方向に  $K+1$  個の SP を配置する。このとき、各座標方向に対して  $K$  次の Lagrange 多項式を構築でき、それらのテンソル積により、セル内分布を以下のように表せる。

$$\hat{Q}_i = \sum_{j,k,l=1}^{K+1} \hat{Q}_{i,j,k,l} \phi_j(\xi) \phi_k(\eta) \phi_l(\zeta) \quad (1)$$

ここで、 $\hat{Q}$  は計算空間での保存量であり、 $i$  はセルインデックス、 $j, k, l$  は  $\xi, \eta, \zeta$  方向の SP インデックスである。 $\phi$  は Lagrange 多項式であり、以下のように表せる。

$$\phi_j(\xi) = \prod_{m=1, m \neq j}^{K+1} \frac{\xi - \xi_m}{\xi_j - \xi_m} \quad (j = 1, \dots, K+1) \quad (2)$$

$K$  次の Lagrange 多項式により  $K+1$  次の空間精度を得ることができる。

$\xi, \eta, \zeta$  方向の非粘性流束  $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$  についてもセル内分布が式 (1) と同様の式で表されるが、単純な  $\partial_\xi \hat{E}$ ,  $\partial_\eta \hat{F}$ ,  $\partial_\zeta \hat{G}$  では隣接セルの情報が含まれていないため、セル界面で不連続な分布となってしまう。そのため、FR 法では以下のように修正された非粘性流束  $\partial_\xi \hat{E}^c$  が用いられる。

$$\begin{aligned} \partial_\xi \hat{E}_i^c = & \partial_\xi \hat{E}_i + \left[ \hat{E}_{i-1/2}^{com} - \hat{E}_i(-1) \right] g'(-1) \\ & + \left[ \hat{E}_{i+1/2}^{com} - \hat{E}_i(+1) \right] g'(+1) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\hat{E}^{com}$ ,  $g'$  はそれぞれセル界面での隣接セルとの共通非粘性流束、修正関数の  $\xi$  微分である。式 (3) を各方向に適用すれば FR 法における非粘性流束を評価できる。また、粘性流束についても同様の式で計算されるが、 $\nabla \hat{Q}$  が粘性流束の計算に用いられるため、この  $\nabla \hat{Q}$  についてもセル内分布の修正が必要となる。

SP の位置にはエイリアス誤差が小さいガウス点を用いる。共通非粘性流束は SLAU、共通粘性流束は Bassi-Rebay2 で評価し、修正関数には  $g_{DG}$  を採用する。また、時間積分法には 4 段階の SSP-RK3 を使用する。本講演論文では P3 (空間 4 次精度) での数値計算結果を記載する。

## 3. 人工粘性付加による WMLES の堅牢化

等温壁条件では壁面近傍で温度分布が急激に変化する。WMLES に用いられる計算格子では壁面近傍のセルサイズが大きいため、この急激な変化を捉えられず

数値的に不安定になりやすい。有限差分法においては壁面近傍で空間低次精度となるため、この不安定化が抑制されていると考えられる。一方、FR 法では未だ汎用的に不安定化を抑制する方法は知られていない。本研究では壁面近傍のみに人工粘性を付加することによって FR 法における等温壁条件下での WMLES の堅牢化を図る。

以下のように物理的な分子粘性  $\mu_f$  に対して人工粘性  $\mu_{AV}$  を付加し、堅牢化を試みる。

$$\mu = \mu_f + \mu_{AV} \quad (4)$$

本研究では理想気体を対象としているため、熱伝導係数  $\kappa$  は以下のように評価し、人工粘性を考慮する。

$$\kappa = \frac{(\mu_f + \mu_{AV}) C_p}{Pr} \quad (5)$$

ここで、 $C_p$ ,  $Pr$  はそれぞれ定圧比熱、プラントル数である。また、人工粘性  $\mu_{AV}$  のセル内分布に振動が生じると数値的に不安定化しやすいため、以下のような壁面垂直方向分布で人工粘性を付加する。

$$\mu_{AV} = \mu_{AV0} LD \quad (6)$$

ここで、 $\mu_{AV0}$  は壁面垂直方向に一定値をとり、毎時間ステップ、各壁面セルで異なる値をとる。 $L$ ,  $D$  は線形関数 [13] および van Driest 減衰関数であり、マッチング高さおよび壁面で人工粘性が 0 になるように設計されている。 $L$ ,  $D$  は以下のように表される。

$$L = 1 - \frac{d}{h_{WM}} \quad (7)$$

$$D = [1 - \exp(y^+/A^+)]^2 \quad (8)$$

ここで、 $d$ ,  $h_{WM}$ ,  $y^+$  はそれぞれ壁面からの距離、マッチング高さ、wall unit での壁面からの距離である。また、 $A^+$  はモデル定数であり、17 としている。本研究では SGS モデルを陽に用いない陰的 LES を実施しているため、マッチング高さで人工粘性 0 としたが、SGS モデルを用いる場合はマッチング高さにおいて人工粘性と SGS 粘性の大きさが同じとなるように定式化すれば良い。また、非常に粗い格子においては、減衰関数  $D$  がうまく機能せず、壁面に補間した粘性流束と共通粘性流束の差が大きくなることによって数値計算が不安定化しやすい。この問題に対処するため、以下のように壁面から 1 つ目の SP に制約を加える。

$$\mu_{AV,1stSP} = \min \left[ \mu_{AV0} LD, \frac{1}{2} \mu_{AV,2ndSP} \right] \quad (9)$$

ここで、 $\mu_{AV,1stSP}$ ,  $\mu_{AV,2ndSP}$  はそれぞれ壁面から 1 つ目、2 つ目の SP における人工粘性である。このようにすると、安定に計算が実行可能である。

次に、 $\mu_{AV0}$  の評価法について説明する。Localised Artificial Diffusivity (LAD)[14, 15] の定式に基づき、

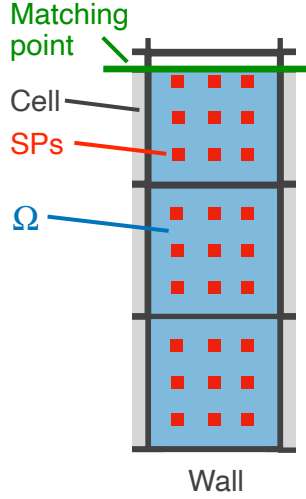


Fig. 1 Schematic of proposed method.

以下のようにして求める。

$$\mu_{AV0} = \max_{SPs \in \Omega} \left[ C \frac{\rho c_s}{T} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_l^2} \Delta \xi_l^2 \Delta l \right] \quad (10)$$

ここで、 $\Omega$  は図 1 における青色の領域であり、壁からマッチング高さまでのセルラインである。また、 $(\cdot)$  は Restriction-Prolongation filter [15, 16] である。C はモデル定数であり、 $C = 0.4$  とする。なお、C の値に対する計算結果への感度はあまりないため、比較的広い範囲の値を選択可能である。 $\Delta \xi_l$ ,  $\Delta l$  はそれぞれ計算空間、物理空間での計算格子幅であり、以下のように表される。

$$\Delta \xi_l = \frac{2}{K} \quad (11)$$

$$\Delta l = \frac{\Delta l_{cell}}{K} \quad (12)$$

ここで、

$$\Delta l_{cell} = |\Delta \mathbf{x}_{l,cell} \cdot \mathbf{n}| \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{x}_{l,cell} = \Delta \xi_l (x_{\xi_l} \ y_{\xi_l} \ z_{\xi_l})^T \quad (14)$$

であり、 $\mathbf{n}$  は壁面垂直方向の単位法線ベクトルであり、図 1 の  $\Omega$  中で一定である。

WM には Kawai [2] らの平衡壁面モデルを用い、WM 中の渦粘性の算出にはセミローカルスケリング [17] によって評価した  $y^+$  を使用する。また、Fukushima ら [10] によって提案された境界条件を粘性項算出のための補助的な境界条件に用いる。加えて、本講演論文の全ての計算条件においてマッチング高さ  $h_{WM}$  は  $h_{WM} = 0.1\delta$  とした。

## 4. 計算結果

### 4-1 検証計算

まず、提案手法の検証を実施する。計算対象はチャネル乱流とし、計算条件は Yao [18] らの条件を採用した。計算条件を表 1 に示す。チャネル内の流量を

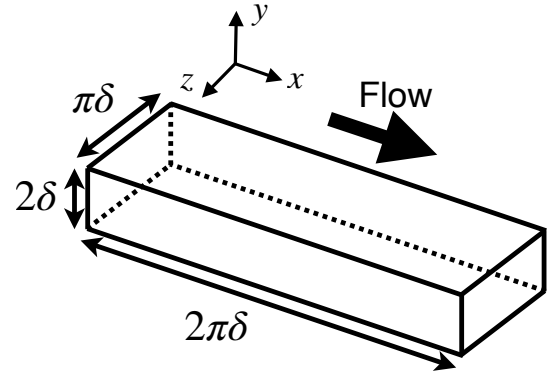


Fig. 2 Computational domain.

Table 1 Freestream conditions for validation case [18] ( $Re_\tau$ ,  $M_b$ ,  $Re_b$ ,  $T_w$ , and  $T_r$  are Reynolds number based on friction velocity, bulk Mach number, bulk Reynolds number, wall temperature, and recovery temperature, respectively)

$Re_\tau$	$M_b$	$Re_b$	$T_w/T_r$
1692	0.8	$6.8 \times 10^4$	0.81

Table 2 Computational grid for P3 ( $N_x$ ,  $N_y$ , and  $N_z$  are number of cells for streamwise, wall-normal, and spanwise directions, respectively)

$N_x \times N_y \times N_z$	$\Delta x_e/\delta$	$\Delta y_e/\delta$	$\Delta z_e/\delta$
$40 \times 30 \times 20$	0.04	0.008–0.029	0.04

維持するため、主流方向の運動方程式および全エネルギー式に以下のような生成項  $f_{pu}$ ,  $f_{pe}$  [19, 20] を加える。

$$f_{pu}^n = f_{pu}^{n-1} + \beta_1 (Q_b^n - Q_{const}) + \beta_2 (Q_b^{n-1} - Q_{const}) \quad (15)$$

$$f_{pe}^n = u f_{pu}^n \quad (16)$$

ここで、 $Q_b$ ,  $n$  はそれぞれバルク平均流量、時間ステップ数である。 $\beta_1$ ,  $\beta_2$  はモデル定数であり、先行研究 [19] を参考に、それぞれ 2, -0.2 とした。また、 $(\cdot)_{const}$  は維持したい値である。さらに、チャネル内の温度を一定にするため、全エネルギー式に以下の生成項  $f_{pe,T}$  を加える。

$$f_{pe,T} = \frac{\rho_b C_{v,b} (T_{const} - T_b)}{\tau_{relax}} \quad (17)$$

ここで、 $C_{v,b}$ ,  $T_b$  はそれぞれバルク平均した定積比熱、温度である。 $\tau_{relax}$  は緩和時間係数であり、以下の式で算出される [20]。

$$\tau_{relax} = 0.3 \frac{\delta}{u_\tau} \quad (18)$$

ここで、 $\delta$ ,  $u_\tau$  はそれぞれチャネル半幅、壁面摩擦速度である。また、初期条件としてチャネル中心に軸を

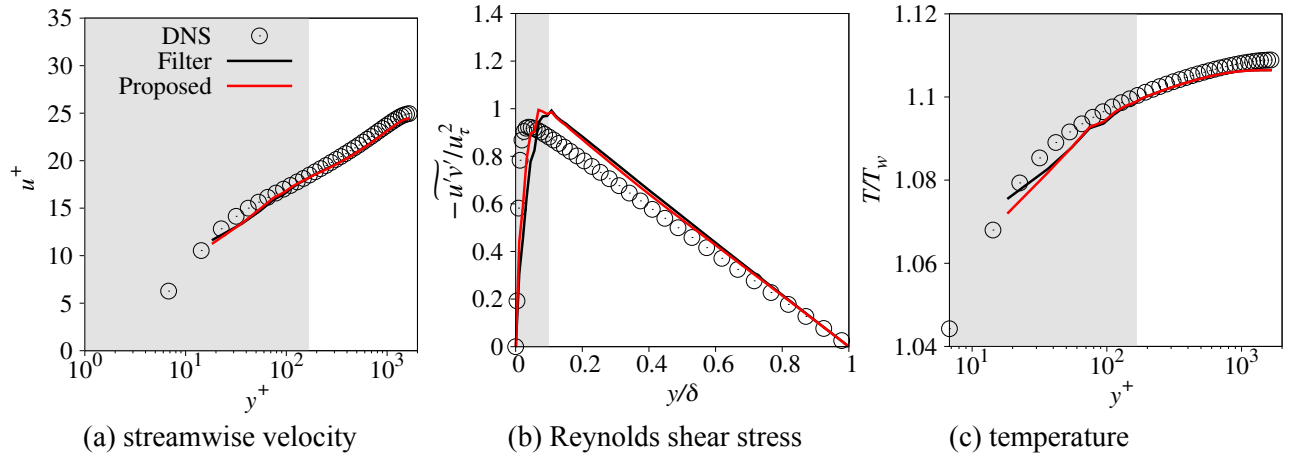


Fig. 3 Turbulent statistics for validation case (grey-shaded part indicates region below matching height).

もつ放物型の速度分布に擾乱を付加 [21] し、乱流に移移させた。

計算領域を図 1 に示す。この領域サイズは先行研究 [22] に基づいて決定した。計算格子には表 2 のものを用いる。  $\Delta x_e$ ,  $\Delta y_e$ ,  $\Delta z_e$  は有効セルサイズであり、セルサイズをセル内の SP 数で割ることによって得られる。また、総自由度は  $1.5 \times 10^6$  である。加えて、この格子は Fukushima [10] らが提案した格子解像度の基準を満たしている。

まず、平均主流方向速度、レイノルズせん断応力、温度の壁面垂直方向プロファイルを図 3 に示す。図中のグレーで塗られた部分はマッチング高さより壁面側の領域を示す。また、凡例の“Filter”は Fukushima ら [10] の方法であり、壁面隣接セルの壁面垂直方向のみに modal filter を使用することによって得られる解である。どの計算結果もチャンネルの大部分で DNS と良く一致している。チャンネルの中心付近で DNS 結果と提案手法の間に乖離が見られるが、これは生成項の影響である。本研究では、人工粘性によってせん断応力（壁面ではない）が増加してもチャンネル内の流量を一定にするため、式 (15), (16) で表される時間ステップごとに変動する生成項を用いたが、固定値の生成項 [23] および modal filter を用いれば、より DNS と一致する結果が得られることを確認している。次に、表 3 に摩擦レイノルズ数  $Re_\tau$ 、摩擦係数  $C_f$ 、無次元熱流束  $B_q = q_w / (C_p u_\tau \rho_w T_w)$  を示す。提案手法で得られた値は DNS の結果と良く一致しており、誤差は 5% 以下である。また、modal filter で得られた値と提案手法での値はほぼ同じ値を算出している。また、modal filter はこの壁面温度条件では安定に数値計算を行えるが、次節でのより低い壁面温度条件では計算が破綻する。

#### 4-2 より低い壁面温度 ( $0.1 \leq T_w/T_r \leq 0.4$ ) に対する堅牢性評価

より低い壁面温度 ( $T_w/T_r = 0.4, 0.2, 0.1$ ) に対する提案手法の堅牢性を評価する。計算格子には表 2 と同じものを用い、前節の計算条件から壁面温度のみを変化させた。前節と同様に、主流方向速度、レイノ

Table 3 Global parameters for validation case

	$Re_\tau$	$C_f \times 10^3$	$B_q \times 10^2$
DNS[18]	1692	4.47	1.13
Filter	1676	4.69	1.09
Proposed	1677	4.69	1.09

ルズせん断応力、温度のプロファイルを図 4 に示す。Modal filter による安定化では、 $T_w/T_r = 0.2, 0.1$  において計算が破綻するが、提案手法においては安定に数値計算が実行できる。壁面温度が低下するほど、 $u^+$  およびレイノルズ応力が上昇しているが、これは無次元化に用いる壁面摩擦速度  $u_\tau$  が温度の低下に伴って小さくなることに起因している。また、これらの壁面温度では参考値がないため、提案手法との比較が行えない。現在、 $T_w/T_r = 0.2$  の条件で WRLES を実施しており、より冷たい壁面温度における提案手法の妥当性を示す準備をしている。

#### 4-3 より高いレイノルズ数に対する堅牢性評価

より高いレイノルズ数に対する堅牢性を評価する。ここでは、元のレイノルズ数 ( $Re_b = 6.8 \times 10^4$ ) から 2 倍 ( $Re_b = 1.4 \times 10^5$ ), 4 倍 ( $Re_b = 2.7 \times 10^5$ ) のレイノルズ数に対する評価を行う。壁面温度は  $T_w/T_r = 0.1$  とし、チャンネル半幅を大きくすることでレイノルズ数を変化させた。図 5 に主流方向速度、レイノルズせん断応力、温度プロファイルを示す。より高いレイノルズ数に対しても安定に数値計算を実施でき、提案手法は高い堅牢性を有している。

## 5. 結論

本研究では、理想気体を対象とし、FR 法において、等温壁条件下での WMLES の数値的な堅牢性を向上させる手法を提案した。マッチング高さよりも壁面側の領域に人工粘性を付加することにより堅牢化を図った。人工粘性の量は LAD の定式に基づいて評価し、壁面法線方向の人工粘性分布は線形関数および van

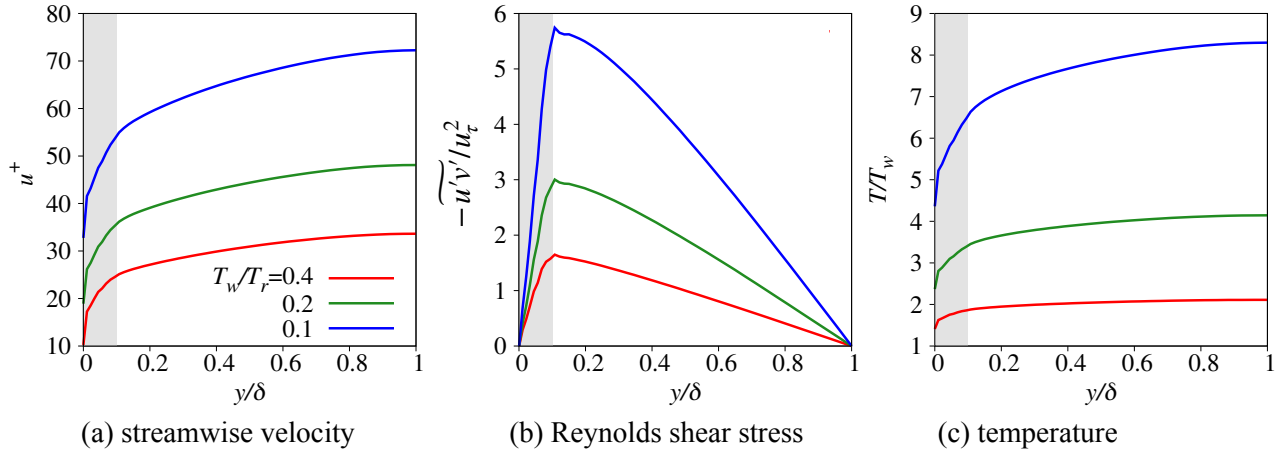


Fig. 4 Turbulent statistics for  $T_w/T_r = 0.4, 0.2$ , and  $0.1$  (grey-shaded part indicates region below matching height).

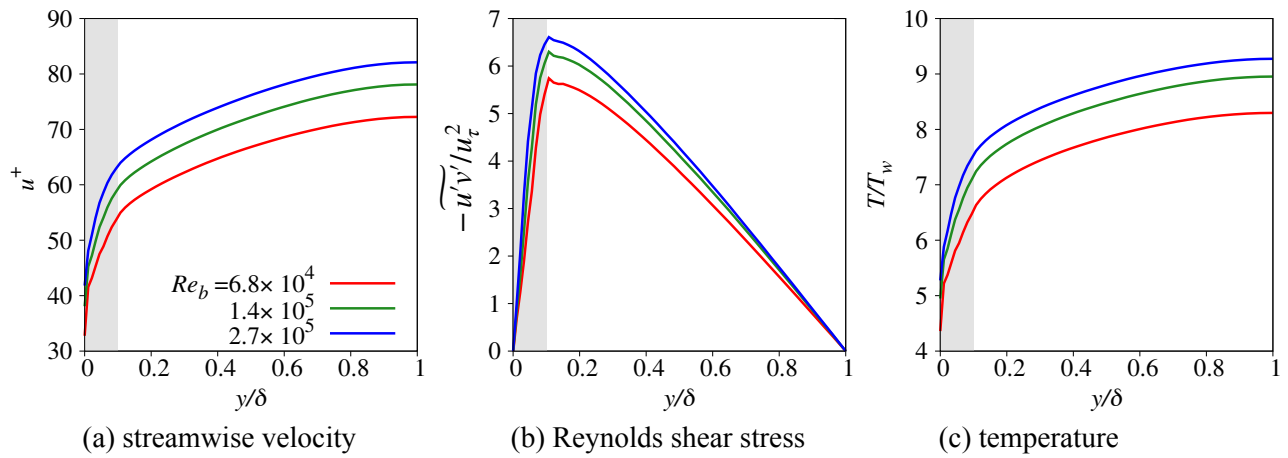


Fig. 5 Turbulent statistics for  $Re_b = 6.8 \times 10^4, 1.4 \times 10^5$ , and  $2.7 \times 10^5$  with  $T_w/T_r = 0.1$  (grey-shaded part indicates region below matching height).

Driest 減衰関数によって定義した。提案手法により、壁温と回復温度の比が  $0.1$  のような極めて低温の壁条件および  $Re_b = O(10^5)$  と比較的高いレイノルズ数においても、FR 法による WMLES を安定に実行できることを示した。

#### 謝辞

東北大学河合宗司教授，北海道大学寺島洋史准教授には人工粘性の定式に対して，大変有意義なご助言をいただいた。また，宇宙航空研究開発機構スーパーコンピュータシステム「JSS3」を利用し，数値計算を実施した。ここに記して謝意を示す。

#### 参考文献

- [1] Choi, H. and Moin, P., “Grid-point requirements for large eddy simulation: Chapman’s estimates revisited,” *Physics of fluids*, Vol. 24, No. 1, 2012.
- [2] Kawai, S. and Larsson, J., “Wall-modeling in large eddy simulation: Length scales, grid resolution, and accuracy,” *Physics of fluids*, Vol. 24, No. 1, 2012.

- [3] Huynh, H. T., “A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods,” AIAA Paper No. 2007-4079, 2007.
- [4] Huynh, H. T., “A reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin for diffusion,” AIAA Paper No. 2009-403, 2009.
- [5] Cockburn, B. and Shu, C.-W., “TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework,” *Mathematics of computation*, Vol. 52, No. 186, 1989, pp. 411–435.
- [6] Wang, Z. J., “High-order wall-modeled large-eddy simulation of high-lift configuration,” *AIAA Journal*, Vol. 62, No. 9, 2024, pp. 3326–3339.
- [7] Frère, A., Carton de Wiart, C., Hillewaert, K., Chatelain, P., and Winckelmans, G., “Application of wall-models to discontinuous Galerkin LES,” *Physics of Fluids*, Vol. 29, No. 8, 2017.
- [8] Shi, J., Yan, H., and Wang, Z. J., “An alge-

- braic wall-model for large eddy simulation with the FR/CPR method,” AIAA Paper No. 2018-2092, 2018.
- [9] Singh, V. and Frankel, S., “On the use of split forms and wall modeling to enable accurate high-Reynolds number discontinuous Galerkin simulations on body-fitted unstructured grids,” *Computers & Fluids*, Vol. 208, 2020, pp. 104616.
- [10] Fukushima, Y. and Haga, T., “On robust boundary treatments for wall-modeled LES with high-order discontinuous finite element methods,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 96, No. 7, 2024, pp. 1170–1193.
- [11] Hamed, M. and Vermeire, B. C., “Optimized filters for stabilizing high-order large eddy simulation,” *Computers & Fluids*, Vol. 237, 2022, pp. 105301.
- [12] Fukushima, Y. and Haga, T., “Assessment of wall-modeled LES with a flux-reconstruction method for high Reynolds number turbulent flows,” AIAA Paper, No. 2021-2750, 2021.
- [13] Kawai, S. and Larsson, J., “Dynamic non-equilibrium wall-modeling for large eddy simulation at high Reynolds numbers,” *Physics of Fluids*, Vol. 25, No. 1, 2013.
- [14] Kawai, S. and Lele, S. K., “Localized artificial diffusivity scheme for discontinuity capturing on curvilinear meshes,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 22, 2008, pp. 9498–9526.
- [15] Haga, T. and Kawai, S., “On a robust and accurate localized artificial diffusivity scheme for the high-order flux-reconstruction method,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 376, 2019, pp. 534–563.
- [16] Premasathan, S., Liang, C., and Jameson, A., “Computation of flows with shocks using the spectral difference method with artificial viscosity, I: basic formulation and application,” *Computers & Fluids*, Vol. 98, 2014, pp. 111–121.
- [17] Huang, P., Coleman, G. N., and Bradshaw, P., “Compressible turbulent channel flows: DNS results and modelling,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 305, 1995, pp. 185–218.
- [18] Yao, J. and Hussain, F., “Turbulence statistics and coherent structures in compressible channel flow,” *Physical Review Fluids*, Vol. 5, No. 8, 2020, pp. 084603.
- [19] Lenormand, E., Sagaut, P., and Ta Phuoc, L., “Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel flow at moderate Reynolds number,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 32, No. 4, 2000, pp. 369–406.
- [20] Cabrit, O. and Nicoud, F., “Direct simulations for wall modeling of multicomponent reacting compressible turbulent flows,” *Physics of Fluids*, Vol. 21, No. 5, 2009.
- [21] Yu, M., Xu, C.-X., and Pirozzoli, S., “Genuine compressibility effects in wall-bounded turbulence,” *Physical Review Fluids*, Vol. 4, No. 12, 2019, pp. 123402.
- [22] Lozano-Durán, A. and Jiménez, J., “Effect of the computational domain on direct simulations of turbulent channels up to  $Re\tau = 4200$ ,” *Physics of Fluids*, Vol. 26, No. 1, 2014.
- [23] Matsuyama, S., “Performance of all-speed AUSM-family schemes for DNS of low Mach number turbulent channel flow,” *Computers & Fluids*, Vol. 91, 2014, pp. 130–143.