

## 2A02 詳細反応機構を用いた高圧メタンロケット燃焼器の燃焼振動解析

○下山凌空, 寺島洋史（北海道大学）

CFD investigation of combustion instabilities in a high-pressure methane-fueled rocket combustor  
Riku Shimoyama and Hiroshi Terashima (Hokkaido University)

Key Words : Combustion instabilities, Rocket, CFD, detailed chemistry, fuel effects

### Abstract

Combustion instabilities in rocket engines arise from the coupling between pressure fluctuations and fluctuations in exothermic heat release, posing serious structural risks. To investigate the dependence of combustion instabilities on fuel type, we conducted high-pressure  $H_2/O_2$  and  $CH_4/O_2$  combustion simulations in a rocket-type combustor using compressible CFD with detailed reaction mechanisms. The results reveal that  $H_2/O_2$  combustion instabilities intensify at low mixture or velocity ratios, whereas  $CH_4/O_2$  instabilities become more pronounced at low mixture ratios or high velocity ratios, exhibiting opposite trends with respect to the velocity ratio. For  $H_2/O_2$  combustion, the Local Rayleigh Index analyses and  $H_2$  density maps indicate that upstream unburned fuel residuals trigger instability amplification, thereby generating strong pressure oscillations. A similar mechanism is expected to operate in  $CH_4/O_2$  combustion. The opposite trends in velocity-ratio dependence observed between  $H_2$  and  $CH_4$  are attributed to differences in flame extinction characteristics under stretch. In  $CH_4/O_2$  combustion, high velocity ratios lead to the formation of lifted flames near the injector, which enhances premixed combustion and results in strong pressure oscillations.

### 1. はじめに

ロケットエンジンを破壊に導く燃焼振動は、開発上重要な安全課題の一つである。ロケットエンジンの開発段階で燃焼振動が発生すると、燃焼器の設計段階への手戻りが生じ、開発の遅れや費用の増大をもたらすため、数値解析により燃焼振動の発生可能性を事前に予測することが望ましい。しかし、燃焼振動は燃焼器内の音響振動や燃焼反応による発熱率変動をはじめとした様々な要因が複雑に絡み合う非定常現象であり、その詳細なメカニズムや支配噴射条件などは現時点で判明していない。

燃料に $H_2$ を用いた研究はこれまで多数行われてきた[1-6]。NASAによって実施されたランピング試験[1]では、燃焼中に燃料温度を徐々に下げていき、その際にみられる燃焼振動挙動の変化について調査されている。結果、燃料噴射温度の低下によって、燃焼器内の音響モードと連成した燃焼振動の発生リスクが増加することが報告されている。このことは、Otaら[2]の2次元DNSによって数値解析上で同様の傾向が確認されている。また、Anderson[3]らにより、複数実験の結果を統合し、混合比が小さいほどもしくは速度比が小さいほど燃焼振動が発生しやすくなる傾向が示唆されている。このことは、Shimoyamaら[4]の2次元DNSにより、燃焼器形状やその他噴射条件の違い

による影響を排除したうえで、改めて混合比が小さいほどもしくは速度比が小さいほど燃焼振動が発生しやすくなることが確認されている。

また、燃料に $CH_4$ を用いた先行研究も多数あり[7-11]、燃焼振動現象に対する基礎的な理解は進んでいるが、燃料の違いによる影響に着目した燃焼振動研究は数少ない。Yangら[12]による実験では $LOX/H_2$ および $LOX/CH_4$ 噴霧燃焼の流れ場の違いについて調査されており、通常燃焼器リム部に付着している非予混合火炎が $LOX/CH_4$ 燃焼の場合、浮き上がり火炎になりやすくなることが示されている。そのため燃料の違いにより燃焼振動の様子が変化することは十分に考えられる。

本研究では、燃料に関して $H_2$ と $CH_4$ を対象に、燃料の違いが燃焼振動へ与える影響を数値解析により調査する。

### 2. 計算条件

#### 2. 1. 数値計算手法

支配方程式には、圧縮性Navier-Stokes方程式、熱的完全気体を仮定した状態方程式、化学種の質量保存式を用いた。流体と反応を時間方向に分離し解き進めるoperator-splitting法[13,14]を採用した。数値流束にはHarten-Lax-van Leer-Contact (HLLC)[15]を用い、3次

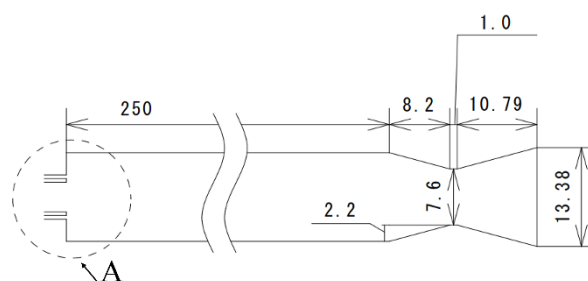
精度 Monotone upstream-centered scheme for conservation laws (MUSCL)[16]を用い高精度化した。なお、制限関数にはminmod limiterを用いた。粘性項、熱伝導項、拡散項は2次精度中心差分法を用いた。時間積分には、3次精度Runge-Kutta法[17]を用いた。

化学反応の時間積分には高速かつ堅牢な手法であるERENA[18]を用いた。熱力物性および輸送物性はCHEMKIN-II library[19]により取得される。

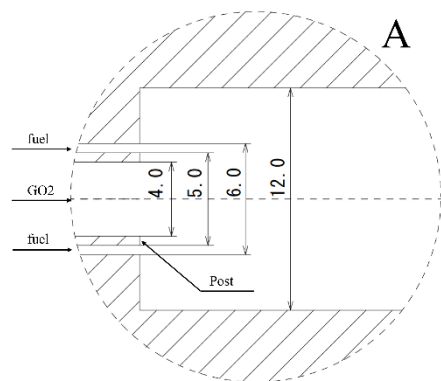
本研究では燃焼器内の化学反応を詳細にとらえるために、詳細反応機構を用いた解析を行った。 $\text{H}_2$ と $\text{O}_2$ の反応機構にはShimizuら[20]によって考案された8化学種34反応の高圧水素の反応機構を用いた。また、 $\text{CH}_4$ と $\text{O}_2$ の反応には38化学種291反応の反応機構FFCM-1[21]を用いた。

## 2. 2. 解析対象および噴射条件

本研究では多数の条件を考慮する必要があるため、計算コストの都合上、2次元での解析とした。なお、Harvazinskiら[8]によって、定性評価における2次元解析の妥当性が示されている他、Shimoyamaら[4]の2次元解析による燃焼振動の不安定境界が実験のものと概ね一致することが確認されている。本研究の解析対象にはミュンヘン工科大で行われた実験[22]で用いられた単一噴射器の燃焼器を2次元形状と仮定し、計算に用いた（図1）。なお、噴射器より上流部は解析コスト削減のため考慮していない。



(a) 全体図



(b) 噴射器近傍

図1 燃焼器形状（単位はmm）

噴射条件として、 $\text{H}_2$ の噴射温度は80 K、 $\text{CH}_4$ の噴射温度は200 K、 $\text{O}_2$ の噴射温度は300 Kとした。この燃料噴射温度は、[1]で報告されている燃焼振動が発生しやすい低温度かつ理想気体近似が成立する温度としている。また、ターゲット燃焼圧は24 barと設定した。本研究では先行研究[3,4]に倣い、混合比と速度比に着目した噴射条件設定を行った。以降、条件の名称としてOF#VR#といった混合比と速度比を冠したものを使用する。なお、混合比と速度比を各条件で独立して設定するために燃料の噴射断面積をそれぞれ変更している。

境界条件として、すべての壁面は断熱・滑り無し条件とした。また、流入境界は温度・質量流量・化学種の質量分率を一定とし、圧力は燃焼器内の値で外挿した。流出境界は超音速流れが形成されるため、すべての物理量を外挿した。初期条件として燃焼器内にはNASA-CEA[23]によって計算された平衡生成ガスを配置した。なお、この平衡生成ガスは $\text{H}_2/\text{CH}_4$ どちらの場合も3000 Kを超えるため、流入する推進剤を着火する役割を担う。

格子点数は766×279点である。なお格子収束性の確認として、一部条件にてFine grid (1088×401点) およびCoarse grid (538×189点) と比較をして、燃焼振動の形態が格子によって変化しないことを確認している。

## 3. 解析結果

### 3. 1. 燃焼流れ場および燃焼振動マッピング

図2に、 $\text{CH}_4$ , OF16VR1の燃焼流れ場および、図3に同条件の噴射器近傍温度場を示す。図2および図3より、噴射器の中央部から酸化剤が噴射され、その上下より燃料が噴射される様子が確認できる。今回使用した噴射器の形状はスリット型であり、酸化剤と燃料の噴流間の速度差によるせん断力により混合される。図3より、リム部に非予混合火炎が付着している様子が確認できる。このような燃焼流れ場は他の単一噴射器ロケットエンジンに関する先行研究[5,8,24]においても確認できるため、計算条件が適切に設定されていると考えられる。なお、 $\text{H}_2$ と $\text{CH}_4$ の間で流れ場の構造の違いはほぼ見られない。

図4に、 $\text{H}_2$ および $\text{CH}_4$ での燃焼振動が発生した際（ $\text{H}_2$ , OF8VR1、 $\text{CH}_4$ , OF4VR4）の圧力振動の時間履歴およびFast Fourier Transform (FFT) の適用結果と燃焼振動が発生しなかった際（ $\text{H}_2$ , OF16VR1、 $\text{CH}_4$ , OF16VR1）の圧力振動時間履歴およびFFT結果を示す。なお、図4中の破線はターゲット燃焼圧である24 barを示す。図4より、燃焼振動が発生しなかった際は、 $\text{H}_2/\text{CH}_4$ いずれも圧力がほぼ一定値で推移している一方、燃焼振動が発生した際は、激しい圧力振動

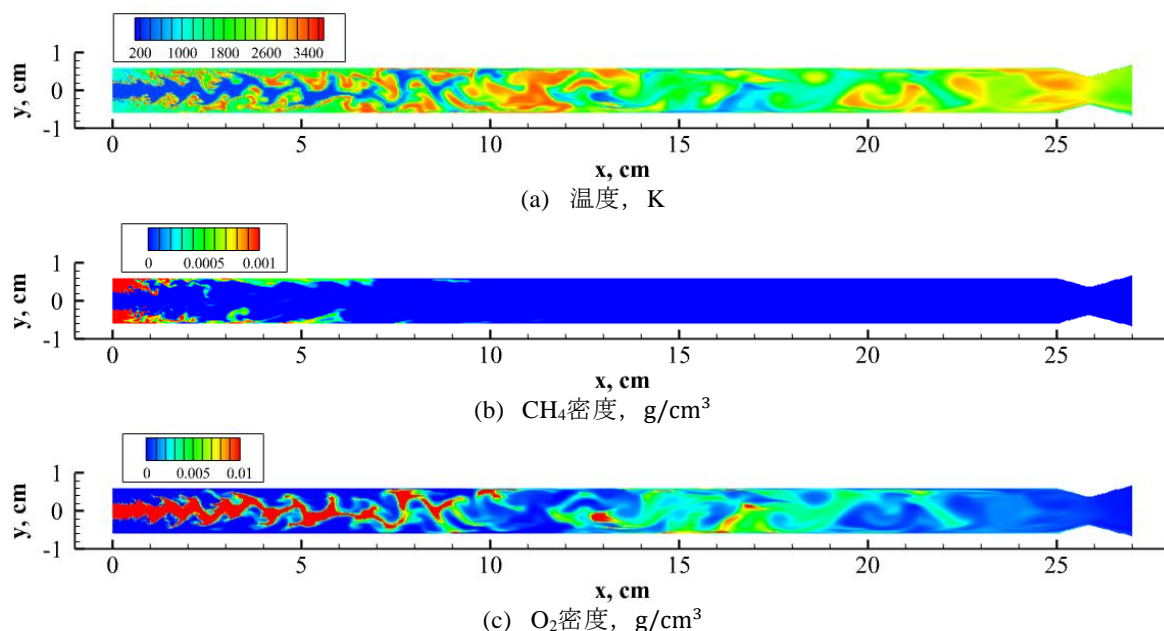


図2 CH<sub>4</sub>, OF16VR1における瞬時燃焼流れ場

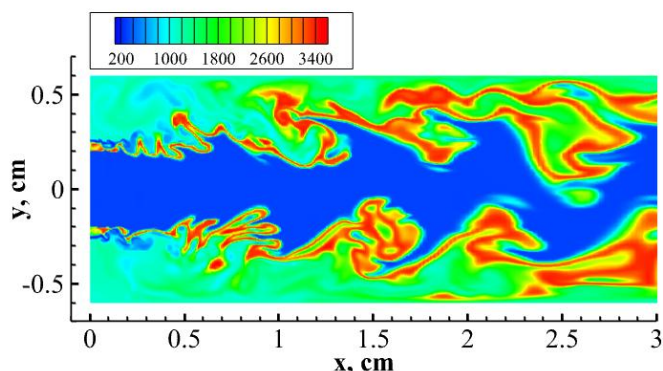


図3 CH<sub>4</sub>, OF16VR1における噴射器近傍瞬時温度場

が見られ最大圧力がターゲット燃焼圧の2倍以上となっていることが確認できる．また，FFT結果より，燃焼振動が発生した条件では，H<sub>2</sub>/CH<sub>4</sub>どちらも2000 Hz付近で一つ目のピークが表れている．燃焼室の音響共鳴周波数の式[25]は

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2} \quad (1)$$

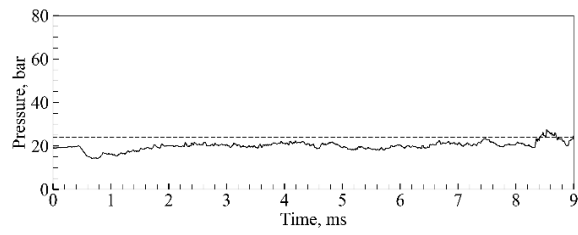
であり， $c$ は音速， $n, L$ はそれぞれ各方向のモード次数と系の寸法である．この式により算出される1次の軸方向モード（1Lモード）の周波数は約2000 Hzであり，本研究の解析で得られた値と一致する．同様に，図4-dのCH<sub>4</sub>, OF4VR4で見られる30000 Hz付近の振動は，1次の高さ方向モードであると考えられる．また，図5に，CH<sub>4</sub>, OF2VR1における1Lモードのモード形状を示す．なお，モード形状の詳細な計算方法は[8]を参照されたい．図5より，燃焼器両端に腹，燃焼器中央部に節が表れていることが確認できる．以

上より，本研究の解析で得られた燃焼振動は実験[1]などでも確認されている典型的な音響振動である．

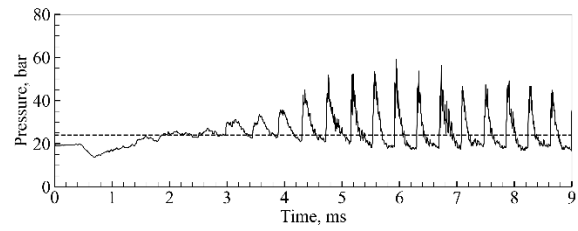
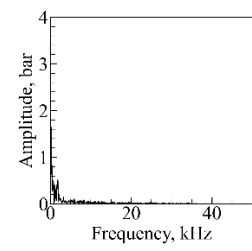
図6に，H<sub>2</sub>およびCH<sub>4</sub>における混合比と速度比で整理した燃焼振動マッピングを示す．図6中プロット上部にはターゲット燃焼圧に対する最大圧力値[%]

を示しており， $\bar{p} = \frac{p_{\max} - p_{\text{target}}}{p_{\text{target}}} \times 100$ と定義される．

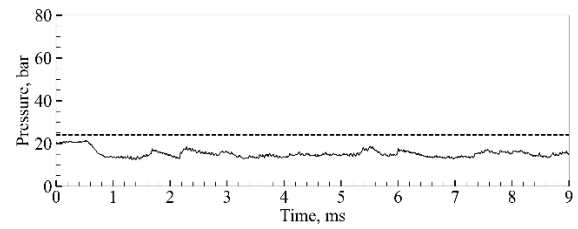
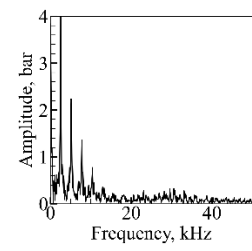
本研究ではこの値が100 %以上となった条件を燃焼振動の発生と定義した．図6-aのH<sub>2</sub>に着目すると，混合比が小さいほどもしくは速度比が小さいほど燃焼振動が発生しやすくなることが分かる．また，プロット上部の数値に着目すると，こちらも混合比が小さいほどもしくは速度比が小さいほど値が大きくなっていることが分かり，これは燃焼振動の様子が混合比と速度比によって整理できることを示している．さらに，図6-a中の破線は実験[3]での不安定境界線を表しており，今回の解析で得られた不安定境界の位置とおおむね一致している．一方で，図6-



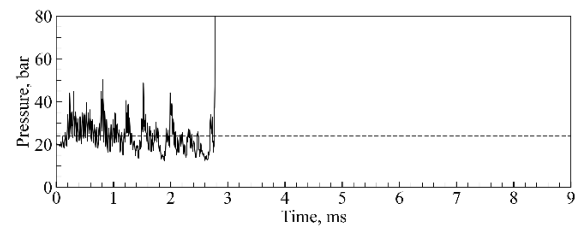
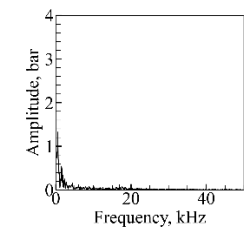
(a)  $\text{H}_2$ , OF16VR1 (stable)



(b)  $\text{H}_2$ , OF8VR1 (unstable)



(c)  $\text{CH}_4$ , OF16VR1 (stable)



(d)  $\text{CH}_4$ , OF4VR4 (unstable)

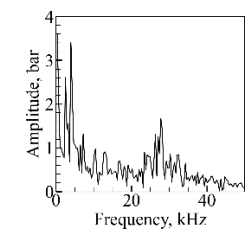


図4 燃焼器内圧力振動時間履歴（左図）およびそのFFT結果（右図）

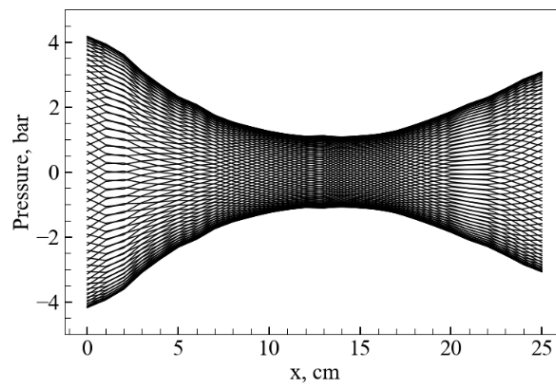


図5  $\text{CH}_4$ , OF2VR1における1Lモード形状

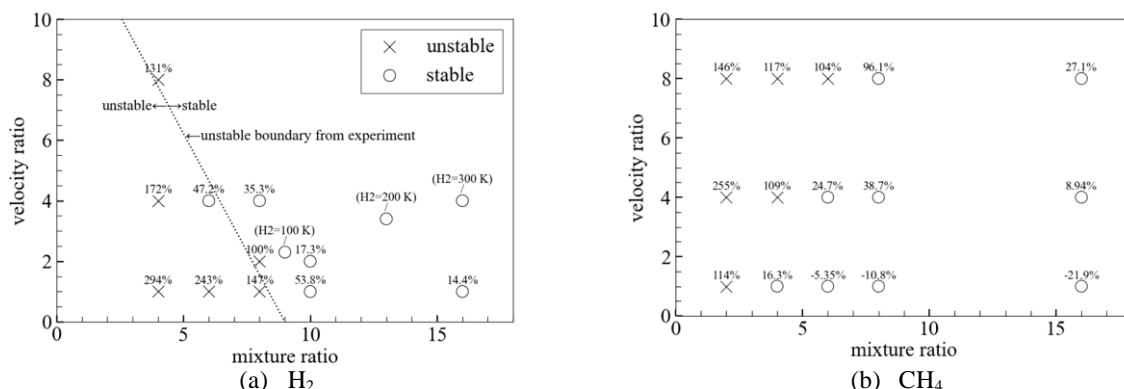


図6 燃焼振動マッピングの比較

bのCH<sub>4</sub>に着目すると、混合比が小さいほど燃焼振動が発生しやすくなる傾向はH<sub>2</sub>での結果と同じである。しかしCH<sub>4</sub>では、速度比が大きいほど燃焼振動が発生しやすくなる傾向が得られており、H<sub>2</sub>の結果とは真逆の挙動を示す。プロット上部の数値に着目すると、混合比が小さいほどもしくは速度比が大きいほど数値が大きくなっていることが分かり、傾向自体はH<sub>2</sub>と異なるものの、混合比と速度比によって燃焼振動の様子が整理できるという点ではH<sub>2</sub>とCH<sub>4</sub>で同一であるといえる。

### 3. 2. Local Rayleigh Index (LRI) による解析

まず、燃焼器内のどの箇所で燃焼振動が発生しているかを特定するためにLocal Rayleigh Index (LRI) を用いる。本研究でのLRIは以下の式で定義される。

$$r(x) = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} (p(x, t) - \bar{p}(x)) (Q(x, t) - \bar{Q}(x)) dt \quad (2)$$

上式において、 $p$ は圧力、 $Q$ はHaet release rate (HRR)、 $T_p$ は1Lモード1周期分の時間である。このLRIが正である際圧力振動が増幅する。図7に、図4と同一の4条件のLRI分布を示す。図7より、H<sub>2</sub>とCH<sub>4</sub>どちらの場合でも、燃焼振動が発生しなかった条件ではLRIの分布が見られず燃焼器内どの箇所でも圧力振動が増幅していないのに対し、燃焼振動が発生した条件下では燃焼器の最も上流側でLRIが大きい値を示している。図5のモード形状より燃焼器の最も上流側は圧力振動の腹でありここで発生する現象が圧力振動へ大きな影響を与える。以上より、燃料に関わらず、燃焼振動メカニズムを考察するうえでは燃焼器上流で発生する現象を考慮することが重要であると考えられる。

### 3. 3. 燃焼器上流における残存H<sub>2</sub>の影響

この節ではH<sub>2</sub>に絞って考察を行う。図8に、燃焼器上流部 ( $x = 3$  cm) における断面H<sub>2</sub>密度平均を燃焼振動マッピング上に色付けしたものを示す。図8よ

り、燃焼振動が発生しやすくなる条件である、混合比が小さいほどもしくは速度比が小さいほど、燃焼器内でH<sub>2</sub>密度が大きいことが分かる。すなわち燃焼器内で未燃のH<sub>2</sub>が残存していると考えられる。燃焼振動は燃焼器内の発熱率変動によって生じる現象であるため、この残存したH<sub>2</sub>がより大きな発熱率変動を引き起こし、燃焼振動を発生させていると考えられる。また、燃焼器内でH<sub>2</sub>が残存する理由について、混合比が小さい場合は推進剤における燃料の割合が大きくなり、化学量論で燃焼する非予混合火炎による燃料の消費が供給に対して追いつかなくなり、燃焼器内にH<sub>2</sub>が残存する。一方、速度比が小さい場合は、燃料・酸化剤噴流間のせん断力が弱くなり、混合が不十分となり、燃焼器内にH<sub>2</sub>が残存する。最終的に、混合比が小さい場合および速度比が小さい場合どちらも、残存したH<sub>2</sub>が圧力振動と連成した発熱率変動を引き起こし、燃焼振動を発生させる。以上の理由より、混合比が小さいほどもしくは速度比が小さいほど燃焼振動が発生したと考えられる。本節ではH<sub>2</sub>に絞って考察を行ったが、基礎的なメカニズムはCH<sub>4</sub>においても同様であると考えられる。

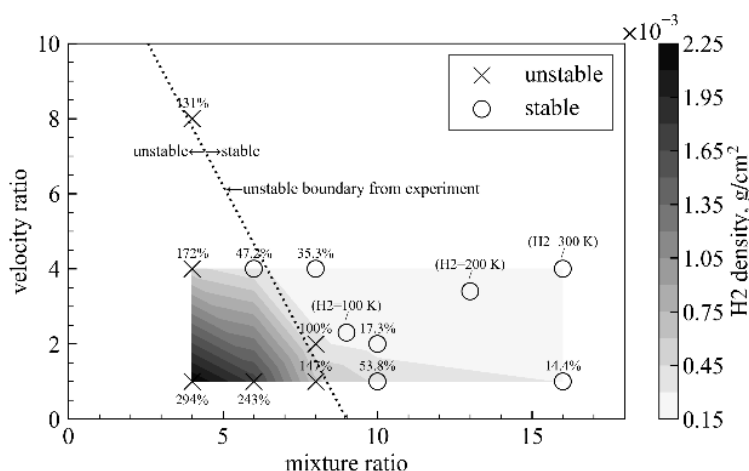
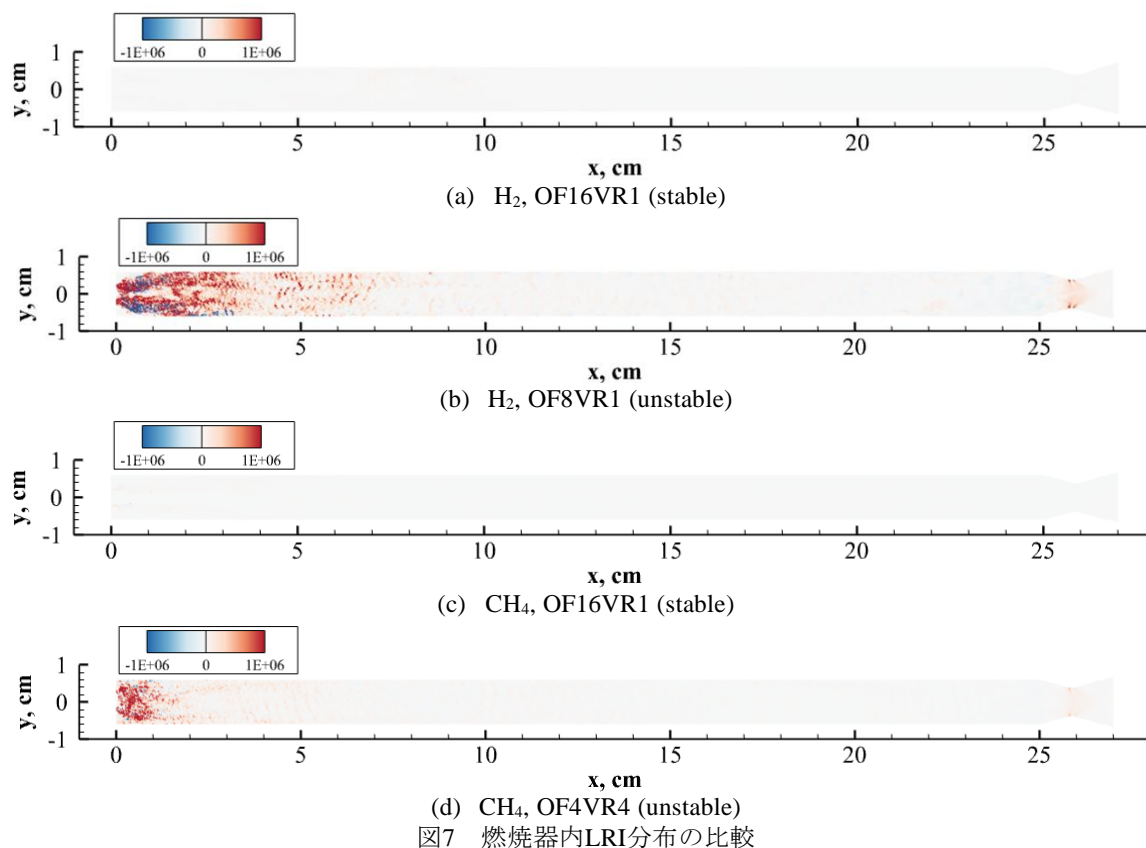
### 3. 4. Flame Indexによる解析

前節ではH<sub>2</sub>におけるメカニズムについて考察を行い、燃焼器上流部で残存した燃料が発熱率変動を引き起こし、燃焼振動をもたらしているということはH<sub>2</sub>とCH<sub>4</sub>のどちらでも同じであると考えられる。本節では図6の燃焼振動マッピングで確認できた、H<sub>2</sub>とCH<sub>4</sub>における速度比に対する燃焼振動発生傾向の違いについて考察する。

Flame Index[26]とは非予混合火炎と予混合火炎を識別する指標であり、次の式で定義される。

$$FI = \nabla Y_F \cdot \nabla Y_O \quad (3)$$

ここで、 $Y_F, Y_O$ はそれぞれ燃料の質量分率と酸化剤の質量分率である。非予混合火炎の場合、火炎帯へ燃料と酸化剤が別々の方向から供給されるためFlame



Indexは負となり、予混合火炎の場合、火炎帯へ燃料と酸化剤が同じ方向から供給されるためFlame Indexは正となる．本研究では、発熱による寄与も考慮したNguyenら[10]によるFlame Indexの定義を用いる．NguyenらのFlame Indexは以下の式で定義される．

$$FI = \frac{\nabla Y_F \cdot \nabla Y_O}{|\nabla Y_F| |\nabla Y_O|} |\omega_f| \quad (4)$$

$\omega_f$ としてHRRを用いた．

通常、非予混合火炎のみが形成されるロケットエンジンにおいて、予混合火炎の生成により発熱率変

動が引き起こされ燃焼振動が発生するというメカニズムはいくつかの先行研究[5,10]にて示唆されている．そのため、本研究においても、予混合火炎の形成という観点から燃焼振動メカニズムを考察する．

図9にH<sub>2</sub>とCH<sub>4</sub>の同一混合比条件における非予混合燃焼割合の時間履歴と予混合燃焼割合の時間履歴を示す．非予混合燃焼・予混合燃焼割合の時間履歴は燃焼器上流部 ( $x = 0 \sim 3$  cm) のみを考慮しており、燃焼器上流部全体の発熱量に対する負および正



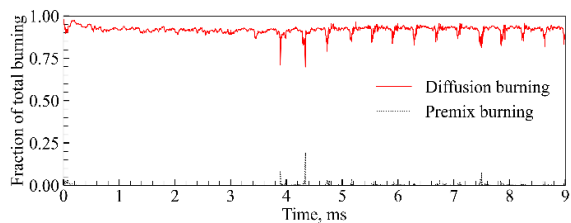
のFlame Indexの割合として計算した．図9より， $H_2$ における燃焼振動が発生した条件（ $H_2$ , OF8VR1）および発生しなかった条件（ $H_2$ , OF8VR4）， $CH_4$ における燃焼振動が発生しなかった条件（ $CH_4$ , OF4VR1）では，非予混合燃焼の割合が多くを占め，非予混合燃焼が支配的である．一方で， $CH_4$ の燃焼振動が発生した条件（ $CH_4$ , OF4VR4）では予混合燃焼の割合が非予混合燃焼の割合よりも大きく，予混合燃焼が支配的であると考えられる．

図10に，図9の4条件のリム近傍温度場を示す．図10より，通常リムに付着している非予混合火炎は， $CH_4$ の高速度比のケース（ $CH_4$ , OF4VR4）でのみ浮き上がっていることが確認できる．この現象はYangら[12]の実験においても確認されている．図9の結果と合わせると， $CH_4$ の高速度比のケースでは火炎の浮き上がりにより，燃料と酸化剤が直接接触する領域が生まれ，せん断力による混合により未燃混合気

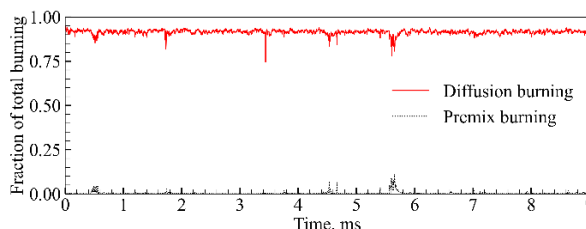
が生まれる．この未燃混合気が着火することによって，予混合燃焼が支配的となっていると考えられる．以上の理由で， $CH_4$ の条件でのみ速度比が大きいほど燃焼振動が発生しやすくなると考えられる．

### 3. 5. 伸長火炎に対する消炎解析

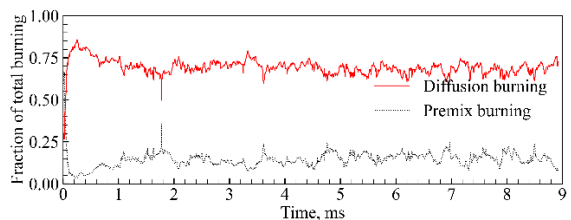
$CH_4$ の高速度比のケースで見られた火炎浮き上がりの検証を行うため，1次元対向流非予混合火炎の計算を行った．ソルバーにはCANTERAを用い，系の大きさは燃焼器リム高さと同じ0.5 mmに設定した．また，圧力はターゲット燃焼圧と同じ24 barに設定し， $H_2/O_2$ および $CH_4/O_2$ の2条件での比較を行った．なお，反応機構は2次元計算と同じものを使用した．本検証計算では，最終的に消炎に至るまでひずみ速度（strain rate）を上げていき，消炎するひずみ速度を取得した．すなわち火炎伸長に対する消炎のしやすさが解析により得られる．



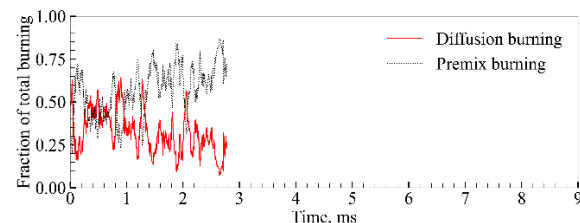
(a)  $H_2$ , OF8VR1 (unstable)



(b)  $H_2$ , OF8VR4 (stable)

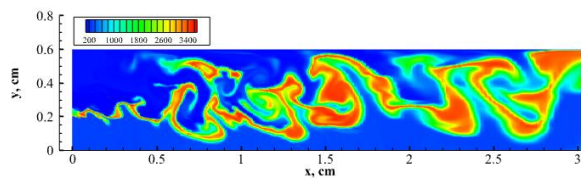


(c)  $CH_4$ , OF4VR1 (stable)

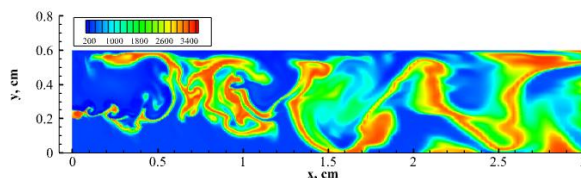


(d)  $CH_4$ , OF4VR4 (unstable)

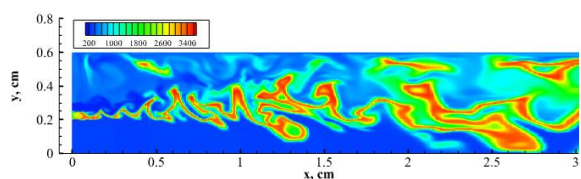
図9 非予混合燃焼（赤実線）および予混合燃焼割合（黒破線）の時間履歴



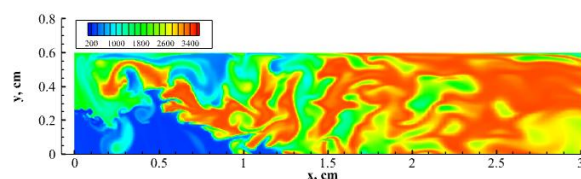
(a)  $H_2$ , OF8VR1



(b)  $H_2$ , OF8VR4



(c)  $CH_4$ , OF4VR1



(d)  $CH_4$ , OF4VR4

図10 リム近傍瞬時温度場の比較

図11に、検証計算の結果を示す。図11より、 $\text{CH}_4$ および $\text{H}_2$ どちらの場合でも温度が急激に下がっている点が存在し、この点が消炎のタイミングである。 $\text{CH}_4$ は低いひずみ速度で消炎に至っているのに対し、 $\text{H}_2$ は比較的高いひずみ速度まで消炎に至らないことが分かる。すなわち、火炎伸長に対して $\text{CH}_4$ が消炎しやすいため、2次元計算において $\text{CH}_4$ の高速度比のケースでのみ浮き上がり火炎が確認されたと考えられる。

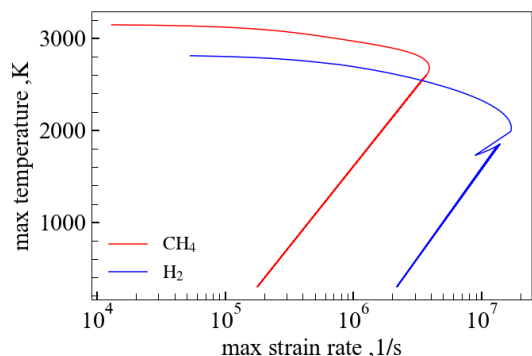


図11 伸長火炎に対する消炎解析結果

#### 4. まとめ

本研究では、詳細反応機構を用いた圧縮性2次元数値解析により、 $\text{H}_2/\text{O}_2$ および $\text{CH}_4/\text{O}_2$ での結果を比較しながら、燃料がロケットエンジンの燃焼振動に与える影響の違いについて調査を行った。

混合比及び速度比に着目した複数条件下での解析により、 $\text{H}_2$ の場合は混合比が小さいほどもしくは速度比が小さいほど燃焼振動が発生しやすくなるという結果が得られ、マッピングの不安定境界線の位置が実験で得られている不安定境界線の位置とおおむね一致した。一方で $\text{CH}_4$ では、混合比が小さいほど燃焼振動が発生しやすくなる傾向は $\text{H}_2$ と同じであったものの、速度比に着目すると、速度比が大きいほど燃焼振動が発生しやすくなるという $\text{H}_2$ とは真逆の傾向が見られた。

LRIによる解析により、 $\text{H}_2$ および $\text{CH}_4$ どちらの場合でも燃焼器上流部で燃焼振動が発生しているという結果が得られた。この結果をもとに、燃焼器上流部における $\text{H}_2$ 密度を調査した。結果、燃焼振動が発生しやすくなる条件である混合比が小さいほどもしくは速度比が小さいほど燃焼器内に $\text{H}_2$ が残存していることが示された。この残存した $\text{H}_2$ による発熱率変動により燃焼振動が発生したと考えられ、 $\text{CH}_4$ においても同様であると考えられる。

最後に、速度比による燃焼振動発生傾向の違いを調査するために、Flame Indexを用いた解析を行った。

結果、通常は非予混合燃焼が支配的であるのに対し、 $\text{CH}_4$ の高速度比の場合にのみ予混合燃焼が支配的になっていることが判明した。これは瞬時温度場の調査により、浮き上がり火炎の形成に起因する未燃混合気の生成・着火が原因であると考えられる。火炎の浮き上がりに関しては、伸長火炎に対する消炎解析により、 $\text{CH}_4$ の方が伸長に対して消炎しやすいことが確認されている。以上の理由により、 $\text{CH}_4$ の場合では速度比が大きいほど燃焼振動が発生しやすくなると考えられる。

#### 参考文献

- [1] Harrije, D. T., Liquid propellant rocket combustion instability, Vol. 194, Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration, 1972.
- [2] Ota, T., Terashima, H., and Oshima, N., “Mechanisms for severe combustion instabilities induced by low-temperature fuel injection of an  $\text{H}_2/\text{O}_2$  rocket-type combustor,” *AIAA SCITECH 2022 Forum*, 2022.
- [3] Anderson, W. E., and Yang, V., Liquid rocket engine combustion instability, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1995.
- [4] Shimoyama, R., Kubota, A., Terashima, H., “Injection parameter identification for severe pressure oscillations in a high-pressure  $\text{H}_2/\text{O}_2$  rocket-type chamber,” *19th International Conference on Numerical Combustion*, 2024.
- [5] Matsuyama, S., Hori, D., Shimizu, T., Tachibana, S., Yoshida, S., and Mizobuchi, Y., “Large-Eddy Simulation of High Frequency Combustion Instability in a Single-Element Atmospheric Combustor,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 32, No. 3, 2016, pp. 628–645.
- [6] Yuan, L., and Shen, C., “Computational investigation on combustion instabilities in a rocket combustor,” *Acta Astronautica*, Vol. 127, 2016, pp. 634–643.
- [7] Harvazinski, M. E., Huang, C., Sankaran, V., Feldman, T. W., Anderson, W. E., Merkle, C. L., Talley, D. G., “Coupling between hydrodynamics, acoustics, and heat release in a self-excited unstable combustor,” *Physics of Fluids*, Vol. 27, No. 4, 2015, p. 045102.
- [8] Harvazinski, M. E., Anderson, W. E., and Merkle, C. L., “Analysis of Self-Excited Combustion Instabilities Using Two- and Three-Dimensional Simulations,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 29, No. 2, 2013, pp. 396–409.
- [9] Sharma, A., De, A., and Kumar, S. S., “Numerical investigation of supercritical combustion dynamics in



- a multi-element LOx–methane combustor using flamelet-generated manifold approach,” *Physics of Fluids*, Vol. 35, No. 11, 2023, p. 115125.
- [10] Nguyen, T. M., and Popov, P. P., and Sirignano, W. A., “Longitudinal Combustion Instability in a Rocket Engine with a Single Coaxial Injector,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 34, No. 2, 2018, pp.354-373.
- [11] Yu, Y. C., Sisco, J. C., Rosen, S., Madhav, A., and Anderson, W. E., “Spontaneous Longitudinal Combustion Instability in a Continuously-Variable Resonance Combustor,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 28, No. 5, 2012, pp. 876–887.
- [12] Yang, B., and Cuoco, F., and Oswald, M., “Atomization and Flames in LOX/H<sub>2</sub>- and LOX/CH<sub>4</sub>- Spray Combustion,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 23, No. 4, 2007, pp.763-771.
- [13] Strang, G., “On the construction and comparison of difference schemes,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 5, No. 3, 1968, pp. 506–517.
- [14] Wichman, I. S., “On the use of operator-splitting methods for the equations of combustion,” *Combustion and Flame*, Vol. 83, No. 3, 1991, pp. 240–252.
- [15] Toro, E. F., Spruce, M., and Speares, W., “Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver,” *Shock waves*, Vol. 4, 1994, pp. 25–34.
- [16] Anderson, W. K., Thomas, J. L., and Van Leer, B., “Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations,” *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 9, 1986, pp. 1453–1460.
- [17] Gottlieb, S., and Shu, C.-W., “Total variation diminishing Runge-Kutta schemes,” *Mathematics of computation*, Vol. 67, No. 221, 1998, pp. 73–85.
- [18] Morii, Y., Terashima, H., Koshi, M., Shimizu, T., and Shima, E., “ERENA: A fast and robust Jacobian-free integration method for ordinary differential equations of chemical kinetics,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 322, 2016, pp. 547–558.
- [19] Kee, R., Rupley, F., and Miller, J., “Chemkin-II: A Fortran chemical kinetics package for the analysis of gas-phase chemical kinetics,” Tech. Rep. SAND89-8009, 1989.
- [20] Shimizu, K., Hibi, A., Koshi, M., Morii, Y., and Tsuboi, N., “Updated Kinetic Mechanism for High-Pressure Hydrogen Combustion,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 27, No. 2, 2011, pp. 383-395.
- [21] Smith, G., Tao, Y., Wang, H., , Foundational fuel chemistry model version 1.0 (ffcm-1), 2016.
- [22] Silvestri, S., Winter, F., Garulli, M., Celano, M. P., Schlieben, G., Haidn, O., Knab, O., and München, G., “Investigation on recess variation of a shear coaxial injector in a GOX-GCH<sub>4</sub> rectangular combustion chamber with optical access,” *7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS)*, Vol. 26, 2017.
- [23] Gordon, S., and McBride, B. J., “Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions and applications. Part 1: Analysis,” Tech. Rep. NASA-RP-1311, 1994.
- [24] Huo, H., and Yang, V., “Large-eddy simulation of supercritical combustion: Model validation against gaseous H<sub>2</sub>–O<sub>2</sub> injector,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 33, No. 5, 2017, pp. 1272–1284.
- [25] Kuttruff, H., *Acoustics: An Introduction*, CRC Press, 2006, Chap. 9.
- [26] Yamashita, H., Shimada, M., and Takeno, T., “A numerical study on flame stability at the transition point of jet diffusion flames,” *Symposium (International) on Combustion*, Vol. 26, No. 1, 1996, pp. 27–34.