

## 2B05 圧縮性乱流ジェットに関する変分的モード分解による解析

○藤野献（東大院），大道勇哉（JAXA），山下礼（東大工）

Variational mode decomposition-based analysis on compressible turbulent jet  
Ken Fujino, Yuya Ohmichi and Rei Yamashita

Key Words: modal analysis, VMD, compressible jet

### Abstract

A newly proposed parameter-free method, SVMD-NCS (Successive Variational Mode Decomposition-based Nonstationary Coherent Structure), was applied to a compressible turbulent jet with a jet Mach number of 0.9. SVMD-NCS demonstrated its ability to automatically determine the number of ICSs (Intrinsic Coherent Structures). By applying SVMD-NCS, upstream-propagating acoustic waves within the potential core of the jet were successfully extracted. These features had not been fully captured by conventional modal analysis methods, such as SPOD (Spectral Proper Orthogonal Decomposition). In addition, the analysis of the decomposed ICSs revealed phase-locking near the nozzle exit. This observation suggests the existence of an interaction between the upstream-propagating acoustic waves in the potential core and the downstream-propagating waves in the shear layer.

### 1. はじめに

非定常な時系列流体データの解析にあたり，モード解析と呼ばれる手法が用いられている．モード解析では，時系列の流体データを複数のモードに分解する．モード解析手法として，例えばPOD (Proper Orthogonal Decomposition)<sup>1)</sup>やDMD (Dynamic Mode Decomposition)<sup>2)</sup>，SPOD (Spectral (frequency-domain) Proper Orthogonal Decomposition)<sup>3,4)</sup>が知られている．PODは，元のデータを少ない直交基底により表現する分解手法である．データの主要な情報を有する基底に注目することで，現象の解析を行う．DMDは，線形力学系を仮定することで，周期的な線形成長の抽出を可能としている．周期的なデータにDMDを適用すると，信号処理手法であるDFT (Discrete Fourier Transformation) に一致することが知られている<sup>5)</sup>．SPODは，周波数空間において少ない直交基底により表現する手法である．SPODでは，統計値が時間変化しない，stationaryな流れに対して，それぞれの周波数ごとに振動するモードに分解される．エネルギーの大きい周波数に着目することで，重要な周期的な現象を抽出する．

しかし，DMDは非線形性を取り入れることができないという欠点を持つ．またDMDは，重要な現象を表すモードの選択が容易でないという欠点を有する<sup>6)</sup>．PODは原理上の制約を有さないものの，分解されたモードの現象の解釈が困難という欠点を持つ．SPODは，統計値が時間変化するnonstationaryな現象

といった，非周期的現象を含む非線形な流れへの適用が困難という欠点を有する．SPODは，DMDと比べ，周期的な重要な現象を表すモードの選択が容易である一方，非周期的な現象に対するモードの選択が容易でない．

近年，振幅や周波数といった統計量が時間変化する信号を表す，nonstationaryな信号を取り扱う信号処理手法であるEMD (経験的モード分解; Empirical Mode Decomposition)<sup>7)</sup>やVMD (変分的モード分解; Variational Mode Decomposition)<sup>8)</sup>の適用が進められている．Nonstationaryな信号を取り扱う信号処理手法であるEMDやVMDを時系列流体データに適用することで，nonstationaryな信号といった非線形性を抽出することが期待される．例えば，Ansell and Mulleneres (2020)<sup>9)</sup>やGupta and Ansell (2020)<sup>10)</sup>は，EMDをベースとした手法を動的失速の翼型周りの実験結果に適用し，物理現象との対応を議論している．さらにSouza et al. (2024)<sup>11)</sup>は，間欠的・遷移的な剥離泡の形成がみられる翼型周りの流れ場に同手法を適用している．しかしEMDは数理的背景を有さないため，数理的背景が明確なVMDと比べ，ノイズにロバストでないという特徴を持つ<sup>8)</sup>．またVMDは，中心周波数と呼ばれる周波数に結びついたIMF (Intrinsic Mode Function) と呼ばれるモードに分解され，周波数領域においてその中心周波数周りの成分を顕著に含む．このため，VMDはEMDと比べ，結果の解釈が容易であると期待される．VMDの時系列流体データへの適用として，

Liao et al. (2023)<sup>12)</sup>はRVMD (Reduced-order VMD)を提案している。RVMDにより、nonstationaryな現象である、間欠的・遷移的な現象の抽出が可能であるとしている。さらにOhmichi (2024)<sup>13)</sup>は、空間のみの関数に分解された従来のモード解析手法に対して、時空間の両者を関数に持つ解析手法であるVMD-NCS (VMD based Nonstationary Coherent Structure)を提案している。VMD-NCSにより、空間分布中の局所的な時間変化が新たに抽出されている。しかしVMDでは、分解するIMFの数などのパラメータをユーザが決定する必要があるという課題が残されている。

このためVMDの時系列流体データの適用において、パラメータの自動決定手法を検討する必要があるといえる。そこでNazari and Sakhaei (2020)<sup>14)</sup>により提案された、逐次的にIMFの数を決定するSVMD (Successive VMD)を新たに適用する。本研究では、SVMDを新たに時系列流体データに応用することで、パラメータを自動決定する手法を新たに提案する。また提案した手法を、これまでSPODなどが適用されている圧縮性乱流ジェットに適用する。

本研究では、ジェットマッハ数 $M_j = 0.9$ の圧縮性乱流ジェットにSVMDをベースとした提案手法を適用する。乱流ジェットでは、放出されたジェットの下流でせん断層が発達し、せん断層においてKH (Kelvin Helmholtz) 不安定が発生することが知られている<sup>15, 16)</sup>。 $M_j = 0.9$ の圧縮性乱流ジェットにおいて、Potential coreと呼ばれる、せん断層の内部では、上流に移流される音響波の発生が確認されている<sup>17, 18)</sup>。SPODにより、wave packetと呼ばれる、秩序的な構造が抽出されている<sup>3, 15)</sup>。せん断層では、KH不安定に対応したwave packetが抽出されている<sup>3, 15, 16)</sup>。Potential coreの下流では、Orr modeと呼ばれるwave packet<sup>19)</sup>が抽出されている<sup>15, 16)</sup>。しかしSPODでは、上流に移流される音響波が十分抽出されていない<sup>15, 16)</sup>。ジェットが放出されるノズルの出口付近において、せん断層と上流に移流される音響波の干渉が知られている<sup>20)</sup>。Figure 1に $M_j = 0.9$ の圧縮性乱流ジェットの概念図を示す。

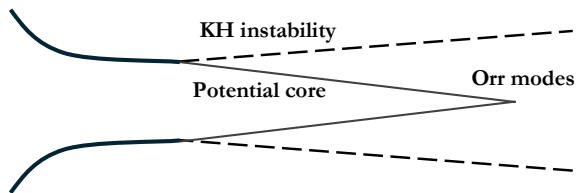


Fig. 1. Schematic view of compressible turbulent jet.

そこで本研究では、圧縮性乱流ジェットにSVMDをベースとしたパラメータフリーな手法を適用し、提案手法の検証及びこれまで用いられてきたSPODの

結果との比較を行う。

## 2. 手法

### 2. 1. SVMD-NCS

本研究で新たに提案する、パラメータ設定を自動化したSVMD-NCS (Successive VMD-NCS) について述べる。提案されたSVMD-NCSの手法の検証を補遺A.1.に示す。

#### 2. 1. 1. SVMD

VMDでは、次の式(1)の最適化問題を解くことで、式(2)のように、元の信号 $f(t)$ を時間の関数であるIMF (Intrinsic Mode Function)  $u_k(t)$ に分解する。式(1)の最適化問題の解法として、ADMM法による解法が提案されている<sup>8)</sup>。

$$\min_{\{u_k\}, \{\omega_k\}} \left\| f(t) - \sum_k u_k(t) \right\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \alpha_k \left\| \partial_t \left[ \left( \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) * u_k(t) \right] \exp(-j\omega_k t) \right\|_2^2 \quad (1)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^K u_k(t) \quad (2)$$

ここで式(1)における第一項は元の信号に関する等式制約、第二項は、それぞれのIMF $u_k(t)$ に定義されるパラメータ $\alpha_k$ による罰則項である。式(1)を解くことで、 $K$ 個のIMF及びそれぞれのIMFに対応した中心周波数 $\omega_k$ が得られる。それぞれのIMFは、周波数空間において、中心周波数 $\omega_k$ 周りの成分を有する。式(1)において、罰則項のパラメータ $\alpha_k$ を調節することで、周波数空間における $u_k(t)$ の中心周波数 $\omega_k$ 周りの成分のバンド幅を調節することが可能である。 $\alpha_k$ が大きい場合、周波数空間における $u_k(t)$ の成分のバンド幅は小さく、 $\alpha_k$ が小さい場合その逆となる。IMFの数 $K$ 及びバンド幅に関するパラメータ $\alpha_k$ に関して、既存のVMDではユーザが決定する必要がある。

このため既存のVMDでは、パラメータ依存性が課題であった、そこでNazari and Sakhaei (2020)<sup>14)</sup>は、自動的にIMF数の $K$ を決定する手法、SVMD (Successive VMD)を提案している。

SVMDでは、元の信号 $f(t)$ から、 $L$ 番目のIMF $u_L(t)$ を次の式(3)により、分解することで抽出する。

$$f(t) = u_L(t) + f_r(t) \\ f_r(t) = f_u(t) + \sum_{i=1}^{L-1} u_i(t) \quad (3)$$

ここで式(3)における $f_r(t)$ は分解されている項とすでに分解された $L-1$ 番目の項からなる。すなわち、

$f_u(t)$ は分解されていない項である。

SVMDでは、次の3つの項 $J_1, J_2, J_3$ に関する最適化問題を解くことで、 $L$ 番目のIMF $u_L(t)$ を抽出する。

$J_1$ 項は、次の式(4)に示すように、VMDの最適化問題における第二項の罰則項と同様である。

$$J_1 = \left\| \partial_t \left[ \left( \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) * u_L(t) \right] \exp(-j\omega_L t) \right\|_2^2 \quad (4)$$

式(4)における $u_L(t)$ は、VMD同様に、 $\omega_L$ を中心周波数として有している。すなわち、 $u_L(t)$ は中心周波数 $\omega_L$ 周りのバンド幅の成分を有している。

$J_2$ 項は、式(5)に示すように、周波数領域において、式(3)の $f_r(t)$ から $u_L(t)$ の中心周波数 $\omega_L$ 周りの成分を取り除くフィルタ $\hat{\beta}_L(\omega) = \frac{1}{\alpha_L(\omega - \omega_L)^2}$ に関する項である。

$$J_2 = \|\beta_L(t) * f_r(t)\|_2^2, \quad \hat{\beta}_L(\omega) = \frac{1}{\alpha_L(\omega - \omega_L)^2} \quad (5)$$

$J_3$ 項は、 $J_2$ 項同様のフィルタを用いて、選択される $L$ 番目のIMF  $u_L(t)$ から、すでに選択されたIMF  $u_1(t), u_2(t) \dots, u_{L-1}(t)$ の成分を周波数領域において取り除くフィルタである。式(6)に $J_3$ 項を示す。

$$J_3 = \sum_{i=1}^{L-1} \|\beta_i(t) * u_L(t)\|_2^2, \quad \hat{\beta}_i(\omega) = \frac{1}{\alpha_i(\omega - \omega_i)^2} \quad (6)$$

式(4), (5), (6)を用いて、式(7)のようにSVMDの最適化問題が構築される。

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_L, \omega_L, f_r} & (\alpha_L J_1 + J_2 + J_3) \\ \text{s.t. } & f(t) = u_L(t) + f_u(t) + \sum_{i=1}^{L-1} u_i(t) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\alpha_L$ は、 $L$ 番目のIMFの中心周波数 $\omega_L$ 周りの成分のバンド幅を調節する項である。式(7)の最適化問題は、ADMM法による解法が提案されている<sup>14)</sup>。

SVMDでは、選択されるIMFの数 $K$ に達するまで、逐次的に $K$ 回、式(7)の最適化問題を解く。本研究では、元の信号 $f(t)$ との再構築誤差が最小となるIMFの数 $K$ をSVMDにより選択されるIMFの数とする。補遺A.2.に再構築誤差とIMFの数の関係を示す。

## 2. 1. 2. SVMD-NCS

SVMD-NCSでは、VMD-NCS同様に最初に時間平均値を差し引いた元の時系列流体データ $[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N]$ に対し、PODにより $r$ 個のPOD基底に低次元化を行う。

$$q_j \approx \sum_{i=1}^r a_i(t_j) \phi_i(x) \quad (8)$$

PODにより得られた、式(9)に示すPOD係数に関する行列に対して、SVMDを多変数に拡張したSuccessive Multivariate VMD (SMVMD)<sup>21)</sup>を適用する。

$$\begin{bmatrix} a_1(t_1) & a_1(t_2) & \dots & a_1(t_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r(t_1) & a_r(t_2) & \dots & a_r(t_N) \end{bmatrix} \quad (9)$$

すると式(9)におけるPOD係数は、式(10)のように $K$ 個の時間に関する関数である、 $u_{k,i}(t)$ に分解される。

$$a_i(t) = \sum_{k=1}^K u_{k,i}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (10)$$

分解された係数 $u_{k,i}(t)$ を用いて、時間及び空間に関する関数が式(11)のように定式化される。

$$\psi_k(t, x) = \sum_{i=1}^r u_{k,i}(t) \psi_i(x) \quad (11)$$

ここで時間と空間に関する関数 $\psi_k(t, x)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ )は、ICS (Intrinsic Coherent Structure)と呼ばれる<sup>13)</sup>。それぞれのICS  $\psi_k(t, x)$ は、中心周波数 $\omega_k$ を持ち、周波数空間において中心周波数 $\omega_k$ 周りの成分を持つ。

これらのICSを用いて、元の流れ場は式(12)のように再構築される。

$$q_j \approx \sum_{k=1}^K \psi_k(t_j, x) \quad (12)$$

VMD-NCS同様、SVMD-NCSでは、元の時系列流体データは、空間及び時間を変数に持つ関数ICS  $\psi_k(t, x)$ に分解される。これまでのPODモードやDMDモードは、空間のみの関数であったが、ICSは、時空間の関数で表現される。このためこれまでのモード解析手法と異なり、空間分布中の局所的な時間変化を単一のICSにより表現することができる。

これまでのVMD-NCSでは、ユーザが分解するICSの数 $K$ を決定する必要があった。SVMD-NCSでは、新たに自動的にICSの数 $K$ を決定することが可能である。

一方で式(7)におけるSVMDにおける収束は、元のデータとの再構築誤差が最小となる場合であるが、補遺A.2.に示すようにこれまでのVMD-NCSと比べると再構築誤差が大きい傾向がある。また分解されたICSの周波数領域における混合が大きい欠点を持つ。

そこで本研究では、ICSの数 $K$ を決定後、得られた係数 $u_{k,i}(t)$ 及びその中心周波数 $\omega_k$ を用いて、式(13)における最適化問題を解くRecalculationを行う。式(13)の最適化問題は、式(7)における $J_2, J_3$ 項を差し引き全てのICSを考慮した場合であり、MVMDにおける最適化問題と同様である。

$$\begin{aligned} \argmin_{\{u_{L,i}\}, \{\omega_{L,i}\}} & \sum_{L=1}^K \alpha_L \sum_{i=1}^r \left\| \partial_t \left[ \left( \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) * u_{L,i}(t) \right] \exp(-j\omega_L t) \right\|_2^2 \\ \text{s.t. } & f_i(t) = \sum_{L=1}^K u_{L,i}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)は、MVMD同様、ADMMにより解かれる。式(13)の最適化問題は、再構築誤差が式(14)を満たした場合である。

$$\frac{\sum_c \|f_c(t) - \sum_k u_{k,c}(t)\|_2^2}{\sum_c \|f_c(t)\|_2^2} < \varepsilon \quad (14)$$

本研究では、Ohmichi (2024)<sup>13)</sup>におけるVMD-NCS同様、 $\varepsilon = 10^{-6}$ とした。Recalculationを行い、式(14)を満たすことで、SVMD-NCSにおける再構築誤差をOhmichi (2024)<sup>13)</sup>におけるVMD-NCSと同程度の再構築誤差とすることが可能である。

### 2. 1. 3. バンド幅に関するパラメータ $\alpha$ の決定手法

それぞれのICSに対して、バンド幅に関するパラメータ $\alpha_k$ の決定手法について述べる。なおパラメータ $\alpha_k$ の設定手法に関して、任意性があるため、本手法以外の手法も考えられることに注意する。

SVMD-NCSにおいて、それぞれのICSは中心周波数 $\omega_k$ 周りのバンド幅の成分を有しており、パラメータ $\alpha_k$ によりバンド幅は調節される。パラメータ $\alpha_k$ が大きいほどバンド幅は狭く、小さいほどバンド幅は広がる。

流体力学における現象は、低周波から高周波まで様々な周波数の現象がみられる。低周波と高周波の振動現象が混在する流れ場では、高周波の現象の周波数に変調し、ブロードバンドの現象として見られる<sup>22-24)</sup>。これは、非線形効果による低周波と高周波の干渉によるためである。このため、低周波側のICSのバンド幅を狭く、高周波側のICSのバンド幅をより広くなるようにパラメータ $\alpha_k$ を設定することが望ましいと考えられる。

そこで本研究では、ICSのバンド幅に関するパラメータ $\alpha_k$ の設定について、低周波側により大きな値を、高周波側により小さな値を与えることとする。 $\alpha_k$ は、中心周波数 $\omega_k$ の関数とし、 $\omega_k \rightarrow 0$ のとき $\alpha_k \rightarrow +\infty$ 、 $\omega_k \rightarrow \infty$ のとき $\alpha_k \rightarrow 0$ となるように設定する。

ICSのバンド幅は、パラメータ $\alpha_k$ に対して、 $1/\sqrt{\alpha_k}$ に比例する<sup>21)</sup>。そこで本研究では、周波数領域の対数グラフ上で概ね等間隔となるよう、 $1/\sqrt{\alpha_k} \propto \omega_k$ となるよう設定する。そこで次の式(15)のように、パラメータ $\alpha_k$ を中心周波数 $\omega_k$ の関数として与える。

$$\alpha_k = \left( C \log \left( 1 + \frac{1}{\omega_k} \right) \right)^2 \quad (15)$$

十分高周波側では、 $1/\sqrt{\alpha_k} \propto \omega_k$ となり、低周波側で $1/\sqrt{\alpha_k} \propto 1/\log(1/\omega) > \omega_k$ を満たし、比較的大きな $\alpha_k$ をとる。ここで式(15)における $C$ の値は、任意の係数である。

なおそれぞれのICSに対するパラメータ $\alpha_k$ の計算

に関して述べる。 $L$ 番目のICS選択時に、 $\|\alpha_L^{m+1} - \alpha_L^m\|_2^2 < \varepsilon_2$ を満たすまで、 $m$ 回反復計算を行う。本研究では、 $\varepsilon_2 = 0.1$ とした。

### 2. 2. 入力データ

本研究では、入力データとして、Towne et al. (2023)<sup>16)</sup>によるオープンソースの圧縮性乱流ジェットに関するデータを対象とする。データは、Brès et al. (2018)<sup>25)</sup>によるLESにより得られている。対象となるジェットは、Convergent-straight nozzleより排出されるジェットであり、ノズル出口では乱流が十分発達している。ジェットマッハ数 $M_j = U_j/c_j$ は、 $M_j = 0.9$ であり、遷音速領域におけるジェットであるといえる。ジェットのレイノルズ数 $Re = \rho_j U_j D / \mu_j$ は、 $Re \approx 1.0 \times 10^6$ である。ここで $D$ はノズルの直径である。ジェットは等温であり、 $T_j/T_\infty = 1.0$ である。LESの数値計算結果について、実験結果との比較及び格子収束性が確認されている<sup>25)</sup>。

本研究では、Towne et al. (2023)<sup>16)</sup>同様に、方位角方向に離散フーリエ変換することにより得られる、軸対称のモードを用いる。SVMD-NCSに適用する際の入力データの内積をOhmichi et al. (2018)<sup>20)</sup>におけるDMD同様、式(16)のように定義する。

$$\langle x_i, x_j \rangle = \int_V (\rho_i \rho_j + u_{xi} u_{xj} + u_{ri} u_{rj} + u_{\theta i} u_{\theta j} + p_i p_j) dV \quad (16)$$

密度は、一様流密度、速度は一様流音速、圧力は一様流音速及び一様流密度により、それぞれ無次元化されている。

速度及び圧力の瞬時場をFig. 2及びその拡大図をFig. 3に示す。Fig. 2は、 $0 \leq x/D \leq 30, 0 \leq r/D \leq 6$ の流れ場を示す。Fig. 3の拡大図は、 $x/D = 0 \sim 5$ 付近のノズル出口付近の流れ場である。Fig. 3における白線は、ジェット速度 $U_j$ の99%、赤線は5%である。それぞれpotential core及びジェットの厚さを表している。

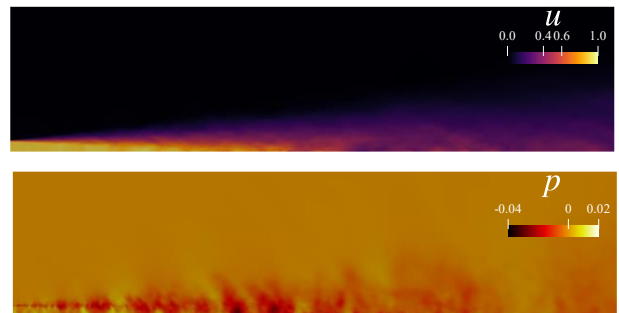


Fig. 2. Instantaneous flow field of streamwise velocity  $u$  and pressure.

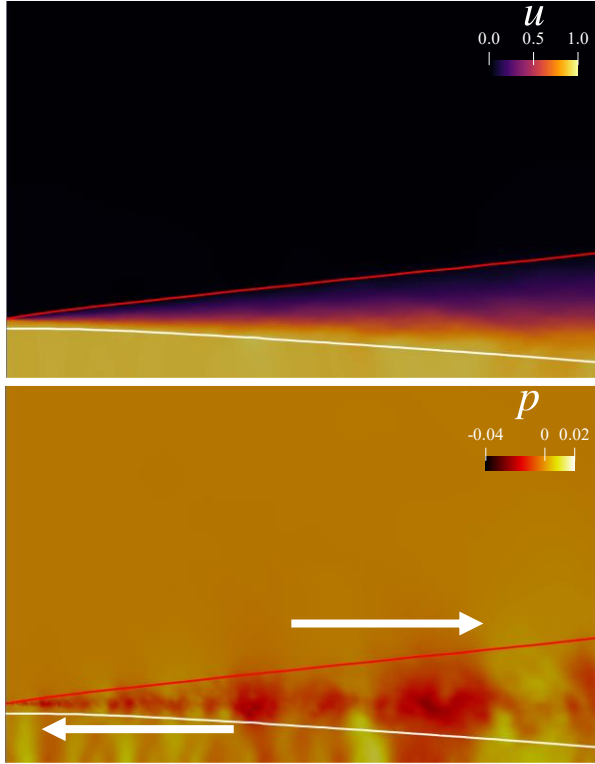


Fig. 3. Enlarged views of instantaneous flow field of streamwise velocity  $u$  and pressure.

Figure 2の速度 $u$ の瞬時場から、排出されたジェットによるせん断層の内側で、potential coreの形成が確認される。下流側でpotential coreが消失すると、大規模な乱流構造の形成がみられる。圧力の瞬時場からは、せん断層及びその下流において、下流に移流するwave packetの形成が確認される。またFig. 3の圧力の瞬時場におけるpotential core内部では、図中の矢印に示す、上流に移流するwave packetが確認される。

### 3. 結果及び考察

最初にSVMD-NCSにより分解された結果を示す。続いて、分解されたそれぞれのICSの流れ場について示す。

#### 3. 1. SVMD-NCSの結果

SVMD-NCSに用いる入力データの条件に関して、Table 1の通りである。

Table 1. Numerical condition for SVMD-NCS.			
$N$	$r$	$\Delta t u_\infty/D$	$C$
500	370	0.18	2.5

ここでTable 1における $N, r$ は、それぞれ入力データのスナップショット数、低次元化に用いるPOD基底数である。 $\Delta t$ は、入力データ間の時間刻み幅であり、一様流速度及びノズル直径により無次元化されている。また $C$ は、式(15)におけるそれぞれのICSの

バンド幅の大きさを調節するパラメータである。低次元化に用いるPOD基底数 $r$ の累積寄与率は、約99%である。 $C \geq 3.0$ の場合、ADMMが収束しないことが確認された。

SVMD-NCSにより得られた結果をTable 2及びFig. 4に示す。Fig. 4におけるAveraged amplitudeは、次の式 (17)に示す、それぞれのICSの周波数空間における $r$ 個の係数 $u_{k,i}(t)$ に関するRMS値を示す。

$$\sqrt{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \hat{u}_{k,i}(\omega)^2} \quad (17)$$

Table 2. Center Strouhal number  $St_c$  of each ICS.

0.0166	0.0659	0.1754	0.4566	1.213
--------	--------	--------	--------	-------

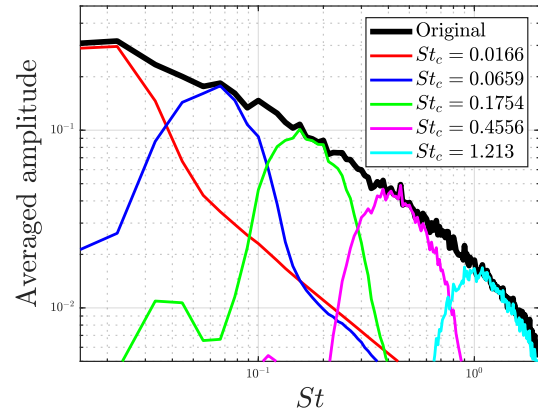


Fig. 4. Averaged amplitude of each ICS and original signal in frequency domain.

Table 2及びFig. 4から、周波数空間において、それぞれのICSがそれぞれの中心ストローハル数 $St_c$ 周りの成分を顕著に有していることが確認される。またそれぞれのICSのバンド幅は、周波数領域の対数グラフ上で概ね等間隔となっていることも確認される。以上から、本研究で提案したバンド幅に関するパラメータ $\alpha$ の設定手法が検証された。

#### 3. 2. それぞれのICSの流れ場

次のFig. 5に分解されたそれぞれのICSの圧力の瞬時場を示す。また $St_c = 0.4556, 1.213$ のICSの場合に関して、 $x/D = 0 \sim 5$ 付近の拡大図を同様にFig. 6に示す。Figure 5は、Fig. 2同様に、 $0 \leq x/D \leq 30, 0 \leq r/D \leq 6$ における流れ場である。またFig. 3同様に、Fig. 6における白線は、ジェット速度 $U_j$ の99%、赤線は5%である。それぞれポテンシャルコア及びジェットの厚さを表している。



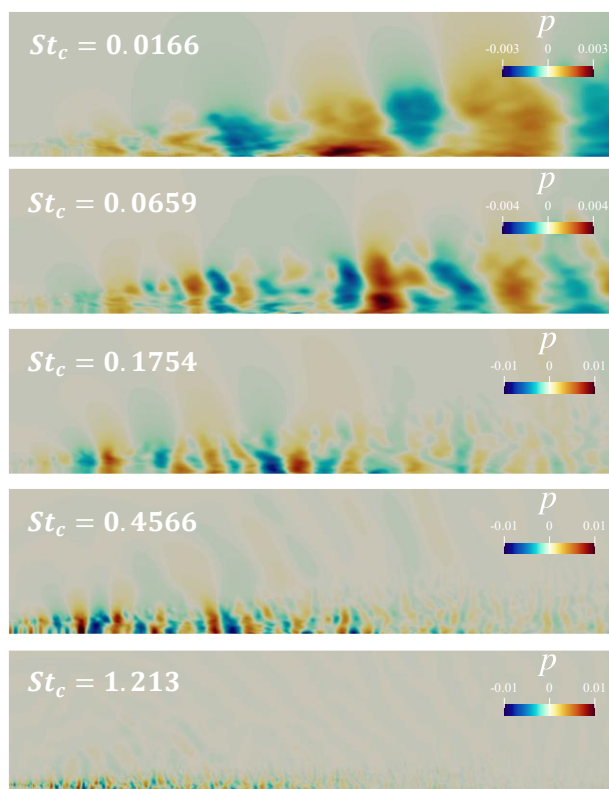


Fig. 5. Instantaneous flow field of pressure for each ICS.

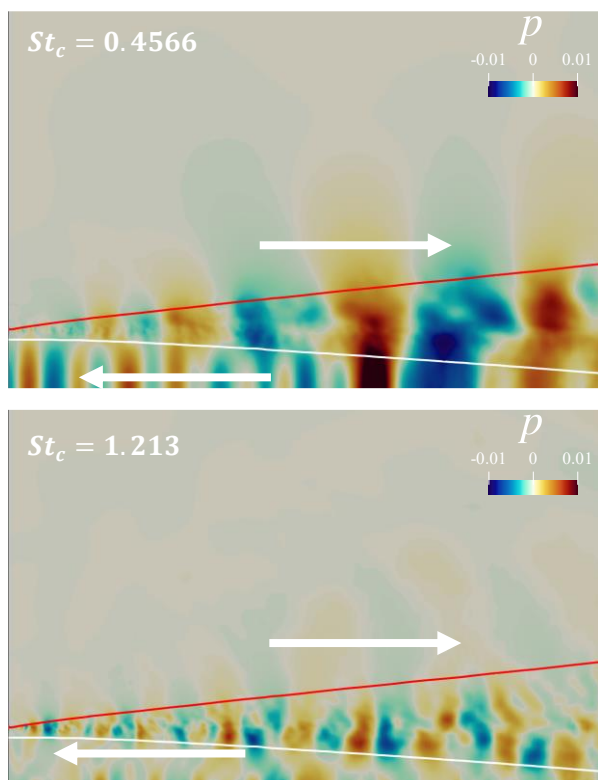


Fig. 6. Enlarged views of instantaneous flow field of pressure for  $St_c = 0.4566, 1.213$ .

Figure 5から、低周波の $St_c = 0.0166, 0.0659, 0.1754$ のICSでは、比較的下流側で下流に移流されるwave packetが顕著に確認される。こうした下流側のwave

packetは、Orr modeを表現していると考えられる。 $St_c = 0.4566$ のICSの場合、拡大図のFig. 6にみられるように、上流側のせん断層付近及びpotential coreの内部において顕著なwave packetが抽出されている。せん断層付近におけるwave packetは、図中の矢印に示す方向の下流に移流されており、KH (Kelvin Helmholtz)不安定を表現しているといえる。Potential coreの内部では、下流に移流されるwave packetがみられたせん断層付近と異なり、図中の矢印に示す、上流へ移流される音響波がみられる。 $St_c = 1.213$ のICSでは、 $St_c = 0.4566$ のICSよりさらに上流で、KH不安定が確認され、上流に移流されるpotential core内部の音響波もわずかに確認される。

Potential core内部で上流に移流されるwave packetは、これまでのSPODでは十分抽出されていない<sup>15, 16</sup>。一方でICSでは、顕著に抽出されている。SPODでは、エネルギーを最も顕著に有するモードが着目され、有するエネルギーの低い現象には着目されない。一方VMD-NCSにおけるICSは、周波数空間において、元の流れ場同様の中心周波数周りの成分を顕著に有している。このためICSは、SPODと異なり、元の流れ場の情報を失わずに表現することができるといえる。

ICSは、周波数領域におけるその中心周波数周りの成分を含むことため、現象における非線形性を含むことができる。非線形性を含むため、複数現象間の相互作用も含まれているものと思われる。そこで本研究では、Boggy (2022)<sup>20</sup>により指摘された、 $St_c = 0.4566$ のICSにみられる、potential core内部の上流に移流される音響波とKH不安定を表現するせん断層の干渉について注目することとする。

### 3. 3. $St_c = 0.4566$ のICSにおけるpotential core内部とせん断層の干渉

上流や下流に移流される音響波をそれぞれ抽出するため、 $St_c = 0.4566$ のICSに対して、時空間フーリエ解析を行う。次の式(18)における移流方向と時間方向に関するフーリエ解析を行う。

$$\psi_k(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k, \omega) \exp(j(kx + \omega t)) dk d\omega \quad (18)$$

$St_c = 0.4566$ のICSに対して、時空間フーリエ解析を適用することで、上流及び下流に移流される音響波を分離した。Figure 7に $St_c = 0.4566$ のICSの上流及び下流に移流される波の圧力分布をそれぞれ示す。Figure 7は、ノズル出口付近である $x/D = 0 \sim 5$ 付近の図である。Fig. 3同様に、Fig. 7における白線は、ジェット速度 $U_j$ の99%、赤線は5%である。それぞれポテンシャルコア及びジェットの厚さを表している。

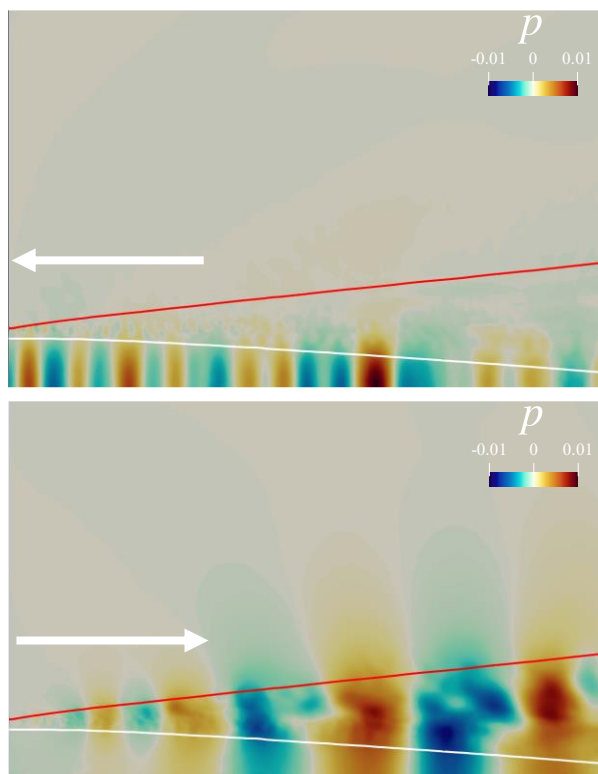


Fig. 7. Instantaneous flow field of pressure for upstream-propagating acoustic waves (top) and downstream-propagating acoustic waves (bottom) of ICS,  $St_c = 0.4566$ .

Figure 7から、上流に移流される音響波は、potential coreの内部で生じていることが確認される。同様に下流に移流される音響波は、せん断層におけるwave packetに対応している。

続いて、 $St_c = 0.4566$ のICSにおける上流及び下流に移流される音響波の位相( $[-\pi, \pi]$ )に関して述べる。Figure 8に局所点における、上流及び下流に移流される音響波の位相の時間変化を示す。いずれもpotential core内部におけるノズル出口の $x/D = 0$ 及び下流側の $x/D = 5$ における点である。

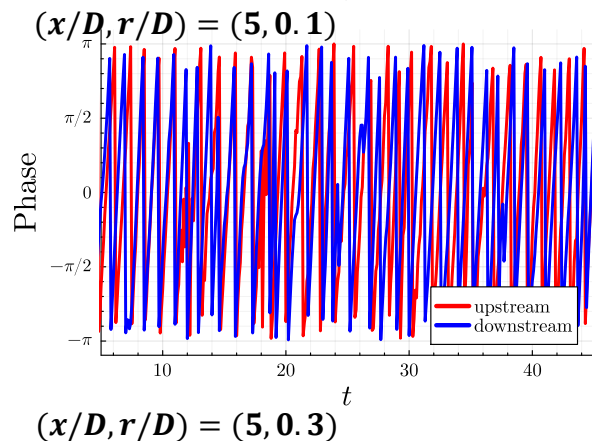
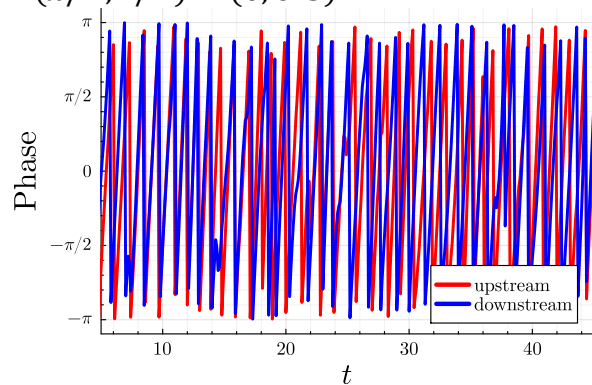
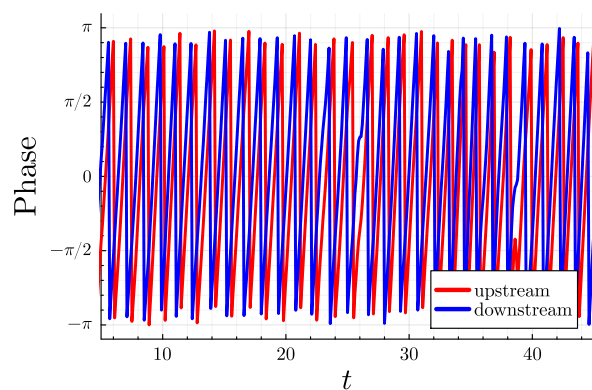
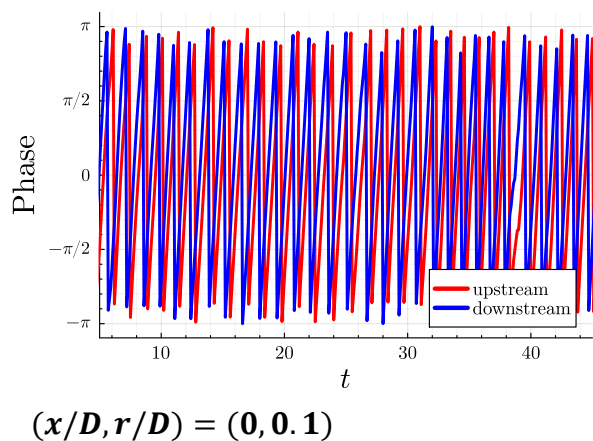


Fig. 8. Time-variation of phases at local points for upstream- and downstream-propagating acoustic waves.

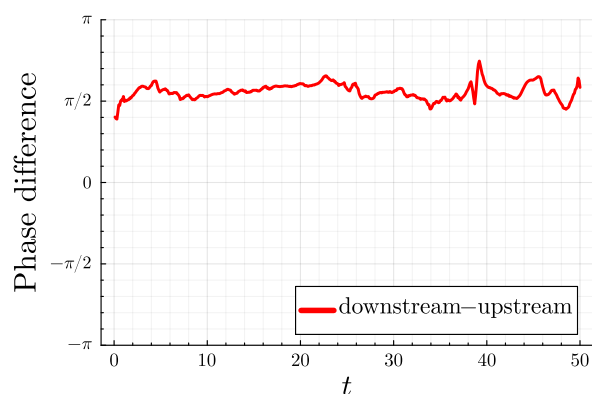


Fig. 9. Time-variation of phase difference between upstream- and downstream-propagating acoustic waves at  $(x/D, r/D) = (0, 0.1)$ .

Figure 8よりノズル出口の $x/D = 0$ では、上流及び下流に移流される波は、概ね一定の位相差を示している。Figure 9に $(x/D, r/D) = (0, 0.1)$ の場合の位相差を示す。Figure 9からも、位相差が概ね一定であることが確認される。 $(x/D, r/D) = (0, 0.3)$ の場合も同様である。このため上流及び下流に移流される音響波が干渉していることが示唆される。一方で比較的下流側の $x/D = 5$ では、位相差は一定でない。これらより、ノズル出口において、上流及び下流に移流される音響波の干渉が示唆される。これは、Boggy (2022)<sup>20)</sup>におけるせん断層と上流に移流される音響波の干渉が、ノズル出口付近でみられたことと対応している。またBoggy (2021)<sup>27)</sup>やMorita et al. (2024)<sup>28)</sup>によって示唆されている、上流に移流される音響波が、KH不安定に影響を与えていることを同様に示唆している。なお本研究におけるノズル出口は乱流境界層である一方、Boggy (2022)<sup>20)</sup>におけるノズル出口は層流境界層であることに注意する。

従来のモード解析手法では、モード内における位相差が固定される。このため、ICSにおいて確認された位相差に基づく議論は、VMD-NCSにより初めて試みられたといえる。

#### 4. 結論

本研究では、圧縮性乱流ジェット( $M_j = 0.9$ )を対象として、パラメータフリーとなるよう本研究で新たに提案したSuccessive VMD-NCS (SVMD-NCS)解析を適用した。本研究の結論を以下に述べる。

1. 本研究において新たに提案したSVMD-NCSにより、ICSの数を自動的に決定できることが確認された。バンド幅に関するパラメータ $\alpha$ に関して、周波数領域の対数グラフ上でバンド幅が概ね等間隔となるよう本研究では提案され、圧縮性乱流ジェットのケースにおいて確認された。
2. 従来のSPODでは、十分抽出されていないジェットのpotential core内部における上流に移流される音響波をSVMD-NCSにより顕著に抽出した。
3. Potential core内部における上流に移流される音響波とせん断層における下流に移流される音響波は、ノズル出口付近で概ね一定の位相差を持つことが確認された。このためノズル出口付近で上流及び下流に移流される音響波の干渉が示唆された。このような位相差に基づく議論は、モード内での位相差が固定されるSPODなどの従来手法では可能でない。本研究手法により、初めて試みられたといえる。

#### 補遺

##### A.1. 提案手法SVMD-NCSにおける検証

本研究で新たに提案したSVMD-NCSに関する手法の先行研究との比較に基づく検証を行う。

検証に用いるケースとして、Towne et al. (2023)<sup>16)</sup>におけるオープンソースのデータであるピッチングする平板翼周りの流れ場を用いる。データは、Dawson et al. (2016)<sup>28)</sup>による非圧縮性流れの数値計算により得られている。ピッチングする平板翼周りの流れ場のケースは、Ohmichi (2024)<sup>13)</sup>によるVMD-NCSにおいて検証に利用されたケースである。ピッチングする迎角 $\alpha(t)$ の条件に関して、式(A.1.)の通りである。

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 - \alpha_P \sin(2\pi f_P t), \\ \alpha_0 &= 30^\circ, \alpha_P = 5^\circ, f_P = 0.05\end{aligned}\quad (\text{A.1.})$$

ここで式(A.1.)における $f_P$ は、無次元周波数である。またこのケースにおけるストローハル数 $St$ 及び無次元ピッチング周波数 $f_P$ は、一様流速度及びコード長により無次元化されている。

式(A.1.)の計算条件は、Ohmichi (2024)<sup>13)</sup>と同様の条件である。Ohmichi (2024)<sup>13)</sup>は、VMD-NCSを用いて、ピッチング周波数に対応した低周波 ( $f_P = 0.05$ ) のICS及び渦の放出に関するICS ( $St = 0.2418$ , Towne et al., (2023)<sup>16)</sup>), その高調波に関するICSを抽出している。

SVMD-NCSを適用する計算条件に関して、Table A.1.の通りである。

Table A.1. Numerical condition for SVMD-NCS.

$N$	$r$	$\Delta t$	$C$
1001	50	0.1	3.5

ここでTable A.1.における $N, r, \Delta t$ は、それぞれ入力データのスナップショット数、低次元化に用いるPOD基底数、入力データ間の時間刻み幅である。また $C$ は、式(15)におけるそれぞれのICSのバンド幅の大きさを調節するパラメータである。低次元化に用いるPOD基底数 $r$ の累積寄与率は、約99%である。また $C \leq 3.0$ の場合、複数のICSに分解されないことが確認された。

SVMD-NCSにより得られた結果に関して、Table A.2.及びFig. A.1.に示す。Fig. A.1.には、式 (17) において定義されたAveraged amplitudeの周波数空間における分布を示す。

Table A.2. Center Strouhal number  $St_c$  of each ICS.

0.2320	0.0512	0.4279
--------	--------	--------



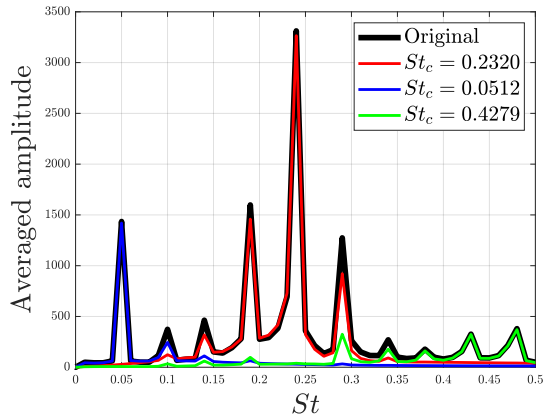


Fig. A.1. Averaged amplitude of each ICS and original signal in frequency domain.

Table A.2.より，渦の放出のストローハル数 $St = 0.2418$  (Towne et al., (2023)<sup>16)</sup>)に対応した，中心周波数 $St_c = 0.2310$ のICSが抽出されていることがわかる．またピッチング周波数 $f_p = 0.05$ に対応した低周波の中心周波数 $St_c = 0.0512$ を持つICSも抽出されていることがわかる．他にも渦の放出に関する高調波のICSも抽出されている．これらの抽出されたICSは，Ohmichi (2024)<sup>13)</sup>によるVMD-NCSにより抽出されたICSと同様の中心ストローハル数を持つ．

またFig. A.1.から，渦の放出に関するICS ( $St_c = 0.2310$ )の最大のピークの周波数の周辺にも複数のピークがみられる．これらのピークのストローハル数は， $St \sim 0.25 \pm 0.05$ となっている．これは渦の放出が，低周波のピッチング振動の作用を受けることで，sidebandの周波数のピークとして現れていることによるものである．このためVMD-NCS同様に，SVMD-NCSにおいても，低周波のピッチング振動による渦の放出への作用を抽出することができているといえる．

以上から本研究において新たに提案されたSVMD-NCSについて検証が行われた．ICSの数 $K$ 及びバンド幅に関するパラメータ $\alpha$ の自動決定手法は，Ohmichi (2024)<sup>13)</sup>によるVMD-NCSと同様のICSを抽出可能であるといえる．

## A.2. 再構築誤差の変化に関して

SVMD-NCSにおけるICSの数の逐次の選択では，元のデータとの再構築誤差が最小となるようなICSの数を選択していた．そこで逐次的に選択するICSの数の違いに伴う，再構築誤差の変化に関して述べる．

Fig. A.2.及びFig. A.3.にピッチングする平板翼周りの流れに関するケース及び圧縮性乱流ジェットに関して，逐次的に選択されるそれぞれのICSの数

と再構築誤差の関係をそれぞれ示す．それぞれのケースにおいて選択されたICSの数は，それぞれ $K = 3, 5$ である．

Fig. A.2.及びFig. A.3.から，いずれのケースにおいても，再構築誤差が最小となるICSの数が確認され，さらに大きなICSの数において，再構築誤差が増加することが確認される．より大きなICSの数の場合，ADMMの収束が確認されなかった．

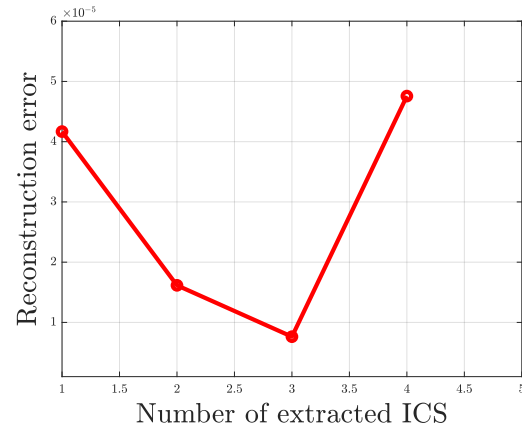


Fig. A.2. The relationship between reconstruction errors and the number of extracted ICSs. Pitching flat-plate case.

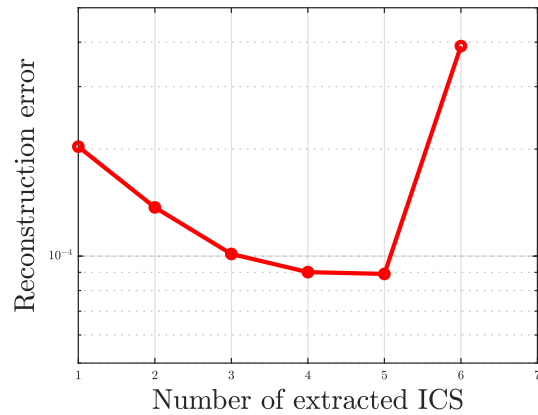


Fig. A.3. The relationship between reconstruction errors and the number of extracted ICSs. Compressible turbulent jet case.

## 謝辞

本研究はJSPS科研費25KJ0752の助成を受けたものです．

## 参考文献

- 1) Lumley, J. L.: The structure of inhomogeneous turbulent flows, *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pp. 167–178, 1967.
- 2) Schmid, P. J.: Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *J. Fluid Mech.*, **656** (2010), pp. 5–28.

- 3) Towne, A., Schmidt, O., and Colonius, T.: Spectral proper orthogonal decomposition and its relationship to dynamic mode decomposition and resolvent analysis, *J. Fluid Mech.*, **847** (2018), pp. 821–867.
- 4) Schmidt, O. T. and Colonius, T.: Guide to spectral proper orthogonal decomposition, *AIAA J.*, **58** (2020), pp. 1023–1033.
- 5) Rowley, C., Clarence, W., Mezić, I., Bagheri, S., Schlatter, P., and Henningson, D. S.: Spectral analysis of nonlinear flows, *J. Fluid Mech.*, **641** (2009), pp. 115–127.
- 6) Taira, K., Brunton, S. L., Dawson, S. T. M., Rowley, C. W., Colonius, T., McKeon, B. J., Schmidt, O. T., Gordeyev, S., Theofilis, V., and Ukeiley, L. S.: Modal analysis of fluid flows: an overview, *AIAA J.*, **55** (2017), pp. 4013–4041.
- 7) Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C., Shih, H. H., Zheng, Q., Yen, N. C., Tung, C. C., and Liu, H. H.: The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **454** (1998), pp. 903–995.
- 8) Dragomiretskiy, K., and Zosso, D.: Variational mode decomposition, *IEEE Trans. Signal Process.*, **62** (2014), pp. 531–544.
- 9) Ansell, P. J., and Mulleners, K.: Multiscale vortex characteristics of dynamic stall from empirical mode decomposition, *AIAA J.*, **58** (2020), pp. 600–617.
- 10) Gupta, R., and Ansell, P. J.: Flow evolution and unsteady spectra of dynamic stall at transitional Reynolds numbers, *AIAA J.*, **58** (2020), pp. 3272–3285.
- 11) Souza, L. F., Miotto, R. F., and Wolf, W. R.: Analysis of transient and intermittent flows using a multi-dimensional empirical mode decomposition, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **38** (2024), pp. 291–311.
- 12) Liao, Z. M., Zhao, Z., Chen, L. B., Wan, Z. H., Liu, N. S., and Lu, X. Y.: Reduced-order variational mode decomposition to reveal transient and non-stationary dynamics on fluid flows, *J. Fluid Mech.*, **966** (2023), A7.
- 13) Ohmichi, Y.: Variational mode decomposition-based nonstationary coherent structure analysis for spatiotemporal data, *Aerosp. Sci. Technol.*, **149** (2024), 109162.
- 14) Nazari, M. and Sakhaei, S. M.: Successive variational mode decomposition, *Signal, Process.*, **174** (2020), 107610.
- 15) Schmidt, O. T., Towne, A., Rigas, G., Colonius, T., and Brès, G. A.: Spectral analysis of jet turbulence, *J. Fluid Mech.*, **855** (2018), pp. 953–982.
- 16) Towne, A., Dawson, S. T. M., Brès, G. A., Lozano-Durán, A., Saxton-Fox, T., Parthasarathy, A., Jones, A. R. Biler, H., Yeh, C. A., Patel, H. D., and Taira, K.: A database for reduced-complexity modeling of fluid flows, *AIAA J.*, **61** (2023), pp. 2867–2892.
- 17) Towne, A., Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Colonius, T., Schmidt, O., Jaunet, V., and Brès, G. A.: Acoustic resonance in the potential core of subsonic jets, *J. Fluid Mech.*, **825** (2017), pp. 1113–1152.
- 18) Schmidt, O. T., Towne, A., Colonius T., Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., and Brès, G. A.: Wavepackets and trapped acoustic modes in a turbulent jet: coherent structure eduction and global stability, *J. Fluid Mech.*, **825** (2017), pp. 1153–1181.
- 19) Tissot, G., Zhang, M., Lajus Jr, F. C., Cavalieri, A. V. G., and Jordan, P.: Sensitivity of wavepacketes in jets to nonlinear effects: the role of the critical layer, *J. Fluid Mech.*, **811** (2017), pp. 95–137.
- 20) Bogey, C.: Interactions between upstream-propagating guided jet waves and shear-layer instability waves near the nozzle of subsonic and nearly ideally expanded supersonic free jets with laminar boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **94S9** (2022), A41.
- 21) Liu, S., and Yu, K.: Successive multivariate variational mode decomposition, *Multidim. Syst. Sign. Process.*, **33** (2022), pp. 917–943.
- 22) Szubert, D., Grossi, F., Jimenez Garcia, A., Hoarau, Y., Hunt, J. C. R., and Braza, M.: Shock-vortex shear-layer interaction in the transonic flow around a supercritical airfoil at high Reynolds number in buffet conditions, *J. Fluids Struct.*, **55** (2015), pp. 276–302.
- 23) Feldhusen-Hoffman, A., Lagemann, C., Loosen, S., Meysonnat, P., Klaas, M., Schröder, W.: Analysis of transonic buffet using dynamic mode decomposition, *Exp. Fluids*, **62** (2021), pp. 1–17.
- 24) Moise, P., Zauner, M., and Sandham, N. D.: Large-eddy simulations and modal reconstruction of laminar transonic buffet, *J. Fluid Mech.*, **944** (2022), A16.
- 25) Brès, G. A., Jordan, P., Jaunet, V., Le Rallic, M., Cavalieri, A. V. G., Towne, A., Lele, S. K., Colonius, T., and Schmidt, O.: Importance of the nozzle-exit boundary-layer state in subsonic turbulent jets, *J. Fluid Mech.*, **851** (2018), pp. 83–124.
- 26) Ohmichi, Y., Ishida, T., and Hashimoto, A.: Modal decomposition analysis of three-dimensional transonic buffet phenomenon on a swept wing, *AIAA J.*, **56** (2018), pp. 3938–3950.
- 27) Bogey, C.: Acoustic tones in the near-nozzle region of jets: characteristics and variations between Mach number 0.5 and 2, *J. Fluid Mech.*, **921** (2021), A3.
- 28) Morita, S., Yakeno, A., Bogey, C., and Obayashi, S.: Study of an aeroacoustic internal feedback loop in a high-speed jet using mode decomposition methods, *J. Flow and Energy*, **2** (2024), pp. 67–83.
- 29) Dawson, S. T. M., Floryan, D. C., Rowley, C. W., and Hemati, M. S.: Lift enhancement of high angle of attack airfoils using periodic pitching, AIAA paper 2016-2069, 2016.