

3B02 衝撃波/境界層干渉に対する情報理論的解析の適用

○幡山純，河内俊憲，田中健人（岡山大学）

Application of information-theoretic analysis to shock wave/boundary layer interactions

Jun Hatayama, Toshinori Kouchi and Kento Tanaka (Okayama University)

Key Words : Shock wave / boundary layer interaction, Information theory, Causal inference

Abstract

We confirmed the causality from separation to reflected shock wave based on information theory which can deal with nonlinear systems. Direct numerical simulation of shock wave/turbulent boundary layer interaction whose Mach number $M = 1.9$, momentum thickness Reynolds number $Re_\theta = 1327$ and shock angle $\beta = 39.27^\circ$ was performed. To deal with three-dimensional structures, a computational domain that is long enough in spanwise direction was used. Proper orthogonal decomposition was performed to extract three-dimensional structures of separation bubbles and compression waves, and we found that the three-dimensional structures come from separation bubbles. Transfer entropy was used to estimate causality between time-series data. Information-theoretic causal inference showed that feedback of information from the upstream boundary layer to the separation bubble, from the separation bubble to the pressure field, and from the pressure field to the upstream boundary layer.

1. 緒言

航空機が飛行する際に翼面で流れが加速され，衝撃波が発生することがある．その衝撃波が振動するバフエット現象により航空機の操縦性が悪化するため，航空機はバフエットが起こらないと考えられる条件で飛行している．そのため，航空機の操縦性向上や近年進められている超音速旅客機の開発にはバフエット現象の抑制が求められる．バフエットの原因と目されているのが衝撃波と翼面近傍で発達する境界層との干渉である．したがって，バフエットの抑制には衝撃波/境界層干渉の物理現象の解明が必要不可欠である．このような事情から翼の周りの流れの数値シミュレーションが行われているが，問題を単純化した平板境界層と斜め衝撃波の干渉においても依然として不明な点が多く，基礎的な物理現象の解明には至っていない．

平板境界層と斜め衝撃波の干渉においては，反射衝撃波の振動が主な調査対象の一つである．その振動特性に大きく関与していると考えられているのが，衝撃波における逆圧力勾配により発生するはく離泡の挙動である．斜め衝撃波と乱流境界層の干渉において，入射衝撃波が弱く境界層のはく離が小規模である場合は境界層上流から移流される大規模構造が反射衝撃波の振動を駆動する^{[1][2]}．一方で，入射衝撃波が強く大規模なはく離が起こる場合，はく離泡の挙動が反射衝撃波の振動を駆動すると推測されてい

る^{[3][4]}．

境界層は三次元的な構造が存在することが知られているため，衝撃波が二次元的であっても三次元的な流れ場になることが予想される．実際，Ceciら^[5]はスパン長さを流入面での境界層厚さ δ_0 の96倍としたDNSを実施し，低周波の不安定性に影響する大規模三次元構造の存在を示した．また，Curaら^[6]は低周波の不安定性が線形不安定性だけでは説明できず，非線形な自己励起プロセスにより説明されると考え，流れ場の大域モードがはく離泡の膨張・収縮サイクルに関与していることを示した．また，Lusherら^[7]によりスパン方向を長くした翼モデルの大規模LESも実施された．しかしながら，こうした三次元的に巨大な計算領域を用いた計算はまだ実施例が少なく，計算コストの観点から計算領域のスパン方向長さを短くすることが多いというのが実情である．また，超音速乱流境界層において低周波の不安定性について調べられているが^{[3][8][9][10]}，大規模構造をとらえるためにはスパン方向に長い計算領域を用いる必要があると考えられる．以上より，従来の研究では捉えられなかった三次元的な構造の有無やそうした構造と衝撃波やはく離泡の振動の関係性に関しては議論の余地が残っている．

三次元構造と衝撃波の振動の因果関係の有無を明らかにすることはバフエット現象の解明に貢献できると考えられる．近年ではこうした関係性に関する

研究も行われており，Pirozzoliら^[11]は低周波の不安定性は衝撃波と境界層が相互作用する領域の共鳴メカニズムにより引き起こされるという仮説を立てた．Sasakiら^[12]は伝達関数を用いて斜め衝撃波と超音速乱流境界の干渉において下流の擾乱から反射衝撃波への因果を初めて示した．さらに，Spectral POD(Proper Orthogonal Decomposition)を用いて下流から反射衝撃波へ向かう波の存在を示した．ただし，実施したLESは計算領域のスパン長さが短く，伝達関数による解析ではスパン方向に平均をとった物理量を用いている．また，この一連の解析では線形性が仮定されている．別の流れ場の解析には非線形の伝達関数を用いて因果関係を検討した例もある^[13]が，衝撃波境界層干渉に対しては非線形の伝達関数が用いられた例はない．

非線形な物理現象を扱ううえでは情報理論に基づく因果推論が有効であると考えられる．情報理論の分野ではShannon^[14]により情報の不確かさや予測の難しさを数学的に表現できるShannonエントロピーが提案された．時系列データ間でShannonエントロピーの移動量を計算することでnon parametricな因果推論を実施することができる^[15]．Shannonエントロピーの移動量のことを指してTransfer Entropyと呼ばれている．データがガウス分布である場合はGranger因果性とTransfer Entropyが等価であり，Transfer EntropyはGranger因果性を非線形に拡張したものとみなせる^[16]．このTransfer Entropyにもnon-separability問題が指摘されている^[17]．しかしながら，その有用性は近年注目されており，流体力学における因果推論においても適用例が存在している．Lozano-Duranら^[18]は速度変動のフーリエ成分間でTransfer Entropyを計算することで対数領域とパフアー領域で乱流エネルギーを保持する渦同士の因果関係が類似していることを示した．荒木^[19]や田之上ら^{[20][21]}により異なるスケール間での渦運動の因果関係も評価された．また，情報量を複合的な成分，固有な成分，冗長な成分に分解

するSynergetic unique redundant decomposition (SURD)では従来手法よりも詳細な因果推論が可能となった^[22]．さらに，航空分野においても翼面での離れの制御に情報理論が適用された^[23]．

こうした研究を受けて，本研究の目的を，流れ場に現れる三次元構造の特性に関する知見の獲得と，そういった三次元構造とはく離泡や衝撃波の振動との因果推論を実施することで衝撃波の振動の原因となっている現象を明らかにすることとした．実施したDNSは主流マッハ数 $M = 1.9$ ，運動量厚さを基準にしたレイノルズ数 $Re_\theta = 1327$ ，衝撃波角 $\beta = 39.27^\circ$ の衝撃波/乱流境界層干渉である．DNSの実施後，はじめに三次元構造を抽出するために圧力場と速度場にPODを適用した．次に，PODモード間の因果関係を推定するために，PODモードの時間係数間でTransfer Entropyを計算した．その結果，情報理論に基づいた非線形の解析を用いて衝撃波/境界層干渉における情報のフィードバックループを確認したので報告する．

2. 数値計算

本研究では上述したように平板境界層と斜め衝撃波の干渉に関する数値計算を実施する．流れ場の概要図をFig. 1に示す．図に示す通り，上流の乱流境界層(TBL)と下流での衝撃波/境界層干渉(SBLI)を個々に計算するという方式を取っている．座標系はいずれも，流れ方向を x ，高さ方向を y ，スパン方向を z と定義する．主流マッハ数は $M = 1.9$ ，主流の総圧は $P_t = 100$ kPa，総温は $T_t = 295$ Kとしている．運動量厚さに基づいたレイノルズ数は $Re_\theta = 1327$ ，摩擦速度に基づいたレイノルズ数は $Re_\tau = 275$ である．TBLに関するシミュレーションでは，境界層は空間的に発展し，流入境界における99%境界層厚さ δ_0 は $\delta_0 = 1$ mmとした．TBLの計算領域は $(L_x, L_y, L_z) = (20\delta_0, 4\delta_0, 5\delta_0)$ ，格子点数は $(N_x, N_y, N_z) = (512, 160, 256)$ である．一方で，SBLIに関するシミュレーションでは，TBLのシミュレーションで得られた境界層が計算領

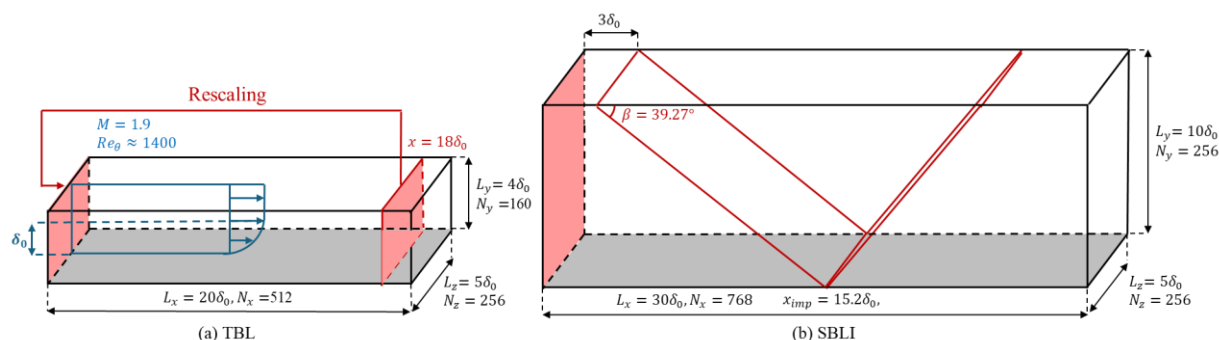


Fig. 1 Schematic of numerical simulation.

域の左端から流入する．また，衝撃波は $y = 10\delta_0$ の上面境界の $x = 3\delta_0$ の直線から入射するようにした．衝撃波角 $\beta = 39.27^\circ$ である．このシミュレーションの計算領域は $(L_x, L_y, L_z) = (30\delta_0, 10\delta_0, 5\delta_0)$ ，格子点数は $(N_x, N_y, N_z) = (768, 256, 256)$ である．いずれのシミュレーションにしても，格子解像度は $\Delta x^+ = 10.4$ ， $\Delta y_{min}^+ = 0.52$ ， $\Delta z^+ = 5.2$ となっている．

主流の初期条件は上述した主流マッハ数，総圧，総温を一律に与えることで取得した．一方で，境界層内の初期条件は99%境界層厚さ $\delta_0 = 0.75$ mmと，主流マッハ数から計算した主流域の平均流速 $U_\infty = 506.8$ m/sを与えて，Blasiusの式により求めた．また，平均温度の初期条件はCrocco-Busemannの式^[24]を用いた．SBLIに関するシミュレーションにおいてはTBLと同様に主流方向速度をBlasiusの式，平均温度をCrocco-Busemannの式で与えた．

本研究で用いる支配方程式は質量保存則(式1)，運動量保存則(式2)，エネルギー保存則(式3)である．それらに加えて完全気体(式4)の状態方程式を用いることで数値解を得た．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\rho E + p) u_j + q_j - \tau_{ij} u_i] = 0 \quad (3)$$

$$p = \rho R T \quad (4)$$

離散化手法として，対流項にはHR-SLAU2スキーム^[25]，粘性項にはME4-Base^[26]を使用した．また，対流項の高次精度化には，Ducrosセンサーが0.4未満の領域では五次精度コンパクトMUSCLスキーム^[27]，0.4以上の領域では四次精度コンパクトMUSCL TVDスキーム^[27]を用いてセル境界での物理量を評価するという手法を採用した．時間積分には三段階三次精度

TVD Runge-Kutta法^[28]を用いた．時間間隔は $\Delta t = 4 \times 10^{-9}$ sである．

本研究では，TBLのシミュレーションにおいて，流入境界の境界条件にリスケーリング法^[29]を採用している．リスケーリング法は流入の境界層厚さを規定することができるため，空間発展型の境界層のシミュレーションによく用いられている．ただし，衝撃波との干渉に関するシミュレーションに用いるときには，リスケール面の位置が流れ場に影響を及ぼすため，注意が必要である．Simensら^[30]は流入面とリスケール面を $20\delta_0 \sim 30\delta_0$ 程度離す必要があると主張している．さらに，SBLIの計算ではリスケール面がはく離泡の影響を受けないように工夫する必要がある．本研究ではTBLの $x = 18\delta_0$ にリスケール面を設ける．さらに，流れ方向の相関を弱めるためにスパン方向に $L_z/2$ だけずらしてからリスケーリング法を適用している^[31]．TBLのシミュレーションにおける他の境界に課した境界条件に関しては，まず流出面($x = 20\delta_0$)はNeumann条件となっておりSBLIの情報を用いていないためTBLがSBLIの影響を受けることはない． $y = 0$ には滑りなし断熱壁， $y = 4\delta_0$ にはRiemann条件^[32]を与える．Riemann不変量を計算する際は上面と無限遠方で等エントロピーを仮定する． z 方向には周期境界条件を採用している．

次にSBLIに関するシミュレーションで採用した境界条件について述べる．流入面の $y \leq 4\delta_0$ にはTBLのリスケール面での物理量を与え， $4\delta_0 < y$ には主流の物理量を与えた．SBLIの流出面にはNeumann条件を与えており，境界条件の影響を抑えるために流出面は斜め衝撃波の入射位置 x_{imp} と $14.8\delta_0$ だけ離している．衝撃波の入射面である $y = 10\delta_0$ の境界は x に依存して，異なる条件を適用している．まず，衝撃波の上流の $18\delta_0 < x < 21\delta_0$ にはTBLの上面と同様にRiemann条件^[32]を適用した．次に， $21\delta_0 \leq x < 33\delta_0$ の

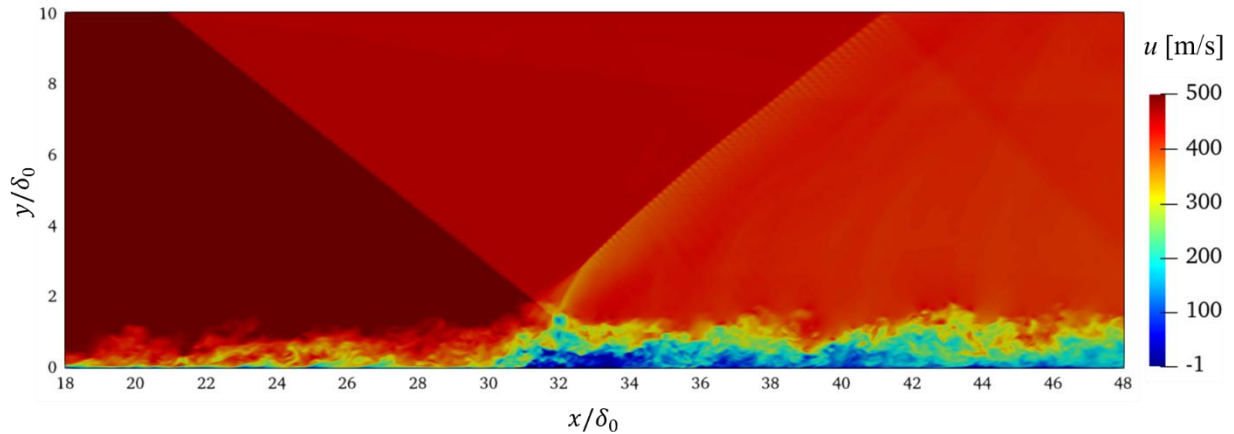


Fig. 2 Instantaneous streamwise velocity field at 0.35 ms.

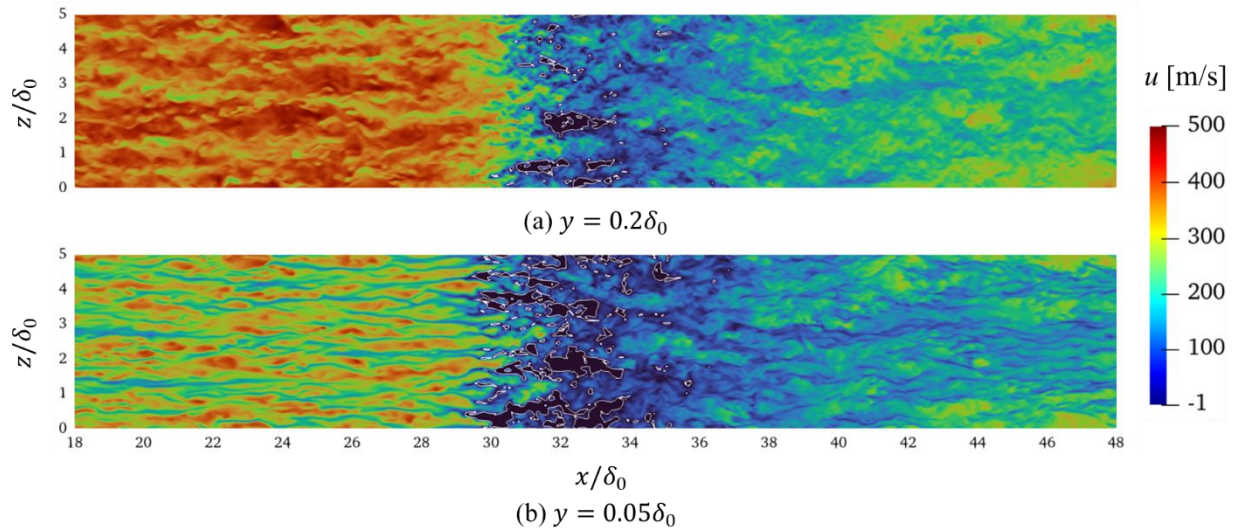


Fig. 3 Instantaneous streamwise velocity field at 0.35 ms (a) $y = 0.2\delta_0$, (b) $y = 0.05\delta_0$.

区間には衝撃波前後の関係式とから衝撃波角 $\beta = 39.27^\circ$ から得られた斜め衝撃波後方の物理量を与えた. このようにすることで, $x = 21\delta_0$ から斜めに衝撃波が計算領域に入射する. さらに下流の $x \geq 33\delta_0$ では, 計算領域上面で反射衝撃波が非物理的に反射することを抑制するために計算領域内外で音響インピーダンスが等しくなることを仮定してRiemann条件^[32]を適用する. それ以外はTBLのシミュレーションと同じで, $y = 0$ には滑りなし断熱壁, z 方向には周期境界条件を採用している.

3. 流れ場の可視化

Fig. 2に時刻 $t = 0.35$ msにおける $z = 2.5\delta_0$ の x - y 平面の速度分布を示す. $(x, y) = (31\delta_0, 2\delta_0)$ 付近で入射衝撃波が反射しており, 反射衝撃波の足は $28\delta_0 < x < 30\delta_0$ にある. なお, 反射衝撃波や圧縮波の位置は時間的に変化する.

Fig. 3(a)には時刻 $t = 0.35$ msにおける $y = 0.2\delta_0$ の x - z 平面における速度分布, (b)には同時刻の $y = 0.05\delta_0$

の x - z 平面における速度分布を示す. 図中の白色の等値線は $u = -1$ m/sである. (a)の $x < 30\delta_0$ の領域は衝撃波の影響を受けていない上流の境界層で, スパン方向に δ_0 程度の幅をもち, 流れ方向に $5\delta_0 \sim 10\delta_0$ 程度の流れ方向に長い構造をもつ高速領域と低速領域が確認される. 斜め衝撃波の影響を受けると流れが減速し, 上流の境界層に見られたような構造は確認されなくなる. (b)の $x < 30\delta_0$ の領域ではスパン方向は細く, 流れ方向に長い低速ストリークが確認される. 斜め衝撃波の影響を受けた後の領域では流れが逆流するはく離泡が確認される. $x > 40\delta_0$ のはく離泡より風下の領域にもストリークらしき構造が確認されるが, 風上領域のものと比べるとスパン方向に蛇行している様子が見て取れる.

4. PODによる特徴構造抽出

PODは時空間データから特徴的な空間基底を抽出する手法の一つである. ある時刻 t_i における格子点数 n の空間データから各点での時間平均を差し引いた

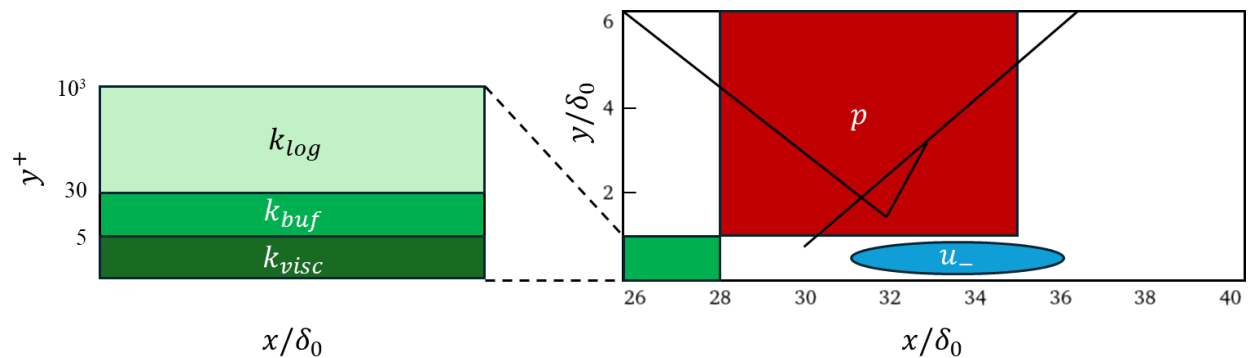


Fig. 4 Schematic of domain decomposition for POD.

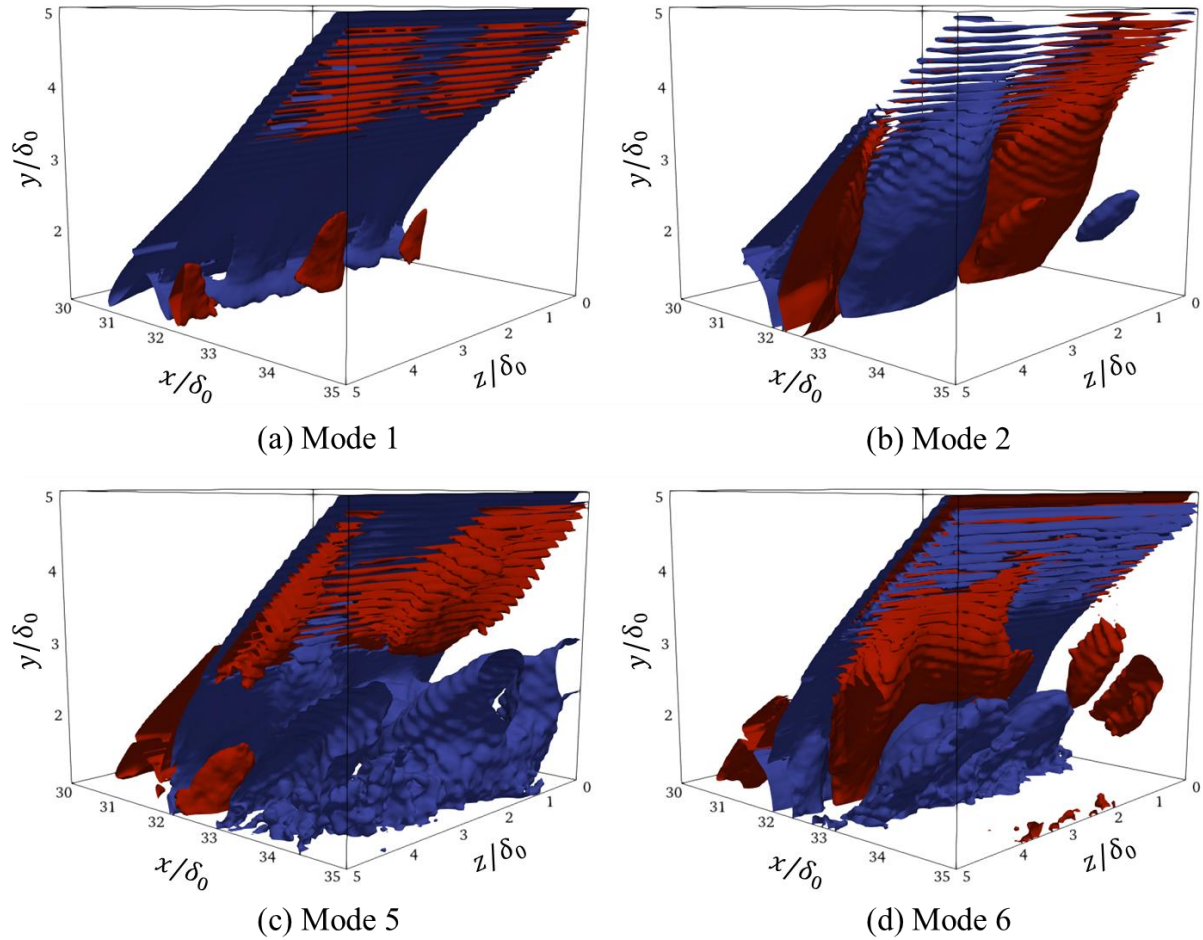


Fig. 5 POD modes of pressure field (a) Mode 1, (b) Mode 2, (c) Mode 5, and (d) Mode 6.

データをベクトルにすることで、 n 次元ベクトル \mathbf{x}_i が得られる。この操作を時刻 t_1 から t_m まで行くと、 m 個の n 次元ベクトルが得られる。このベクトルを式5のように並べた行列をデータ行列 D と呼ぶ。

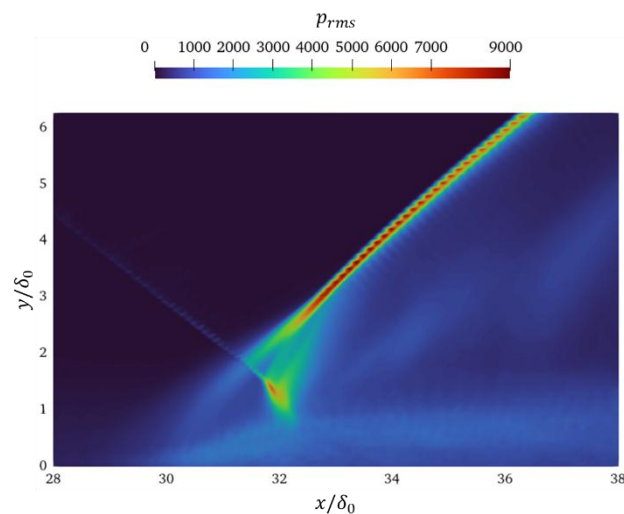


Fig. 6 RMS of pressure field.

$$D = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m] \quad (5)$$

PODでは固有モードを抽出するために以下の共分散行列の固有値問題を解く。 λ_k と \mathbf{v}_k はそれぞれ k 番目の固有値・固有ベクトルである。

$$DD^T \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \quad (6)$$

この解析を実施するうえで注意が必要なのが、行列の大きさである。流体力学などのデータに関しては用意できる時間ステップ数に対して、空間の格子点数が非常に大きくなるのがほとんどである。その場合、共分散行列 DD^T の要素数が格子点数の2乗となり、巨大な行列を扱う必要がある。そこで、Snapshot PODと呼ばれる手法が用いられることがある。Snapshot PODでは、 DD^T に代わり、 $D^T D$ に関する、次の固有値問題を解く。

$$D^T D \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \quad (7)$$

$D^T D$ は $m \times m$ の正方行列なので、もともとの DD^T に比べて小さくなることが多く、計算コストを抑えることができる。本稿では、Snapshot PODを指してPODと記す。固有モード Φ_k とモードごとの時間発展を表す時間係数 \mathbf{a}_k は以下のように計算される。ただし、固有モードは固有値が大きい順に並べ替えられており、

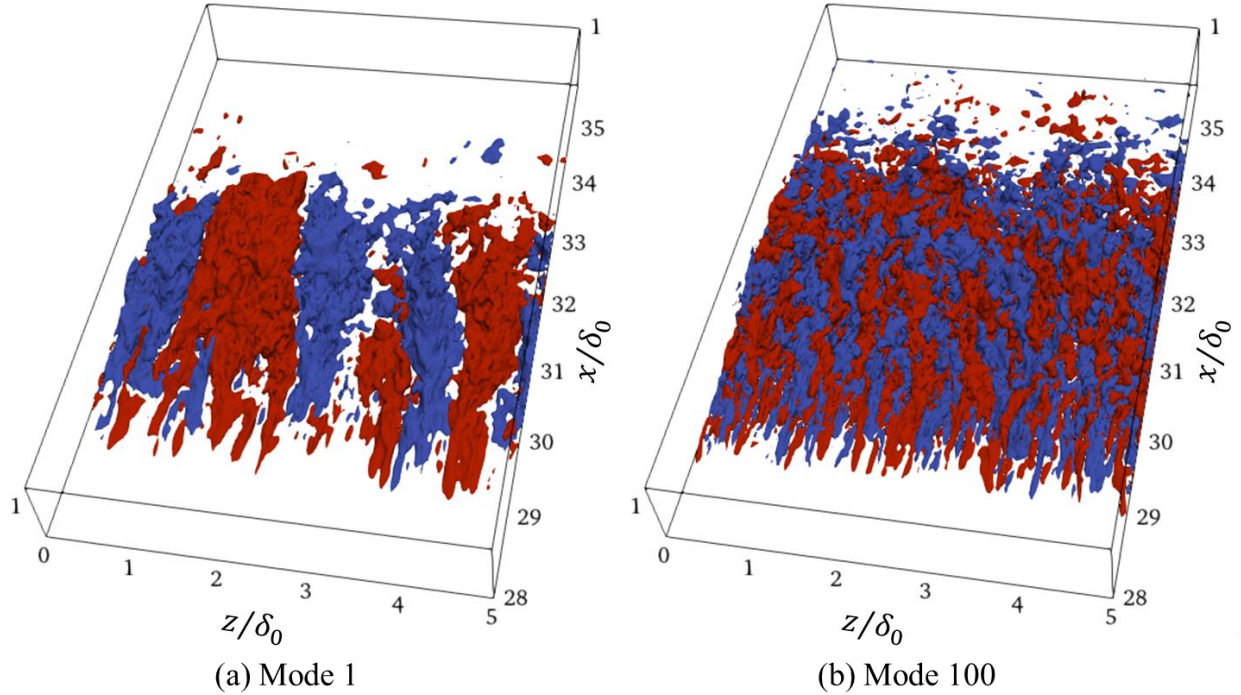


Fig. 7 POD modes of separation bubbles (a) Mode 1, and (b) Mode 100.

L2ノルムで規格化したものを以降の解析で用いる.

$$\Phi_k = D \mathbf{v}_k \quad (8)$$

$$\mathbf{a}_k = D^T \Phi_k \quad (9)$$

Fig. 4に示すように流れ場を上流の境界層の粘性底層, バッファ層, 対数領域, はく離泡, 圧力場に分割しそれぞれの領域にPODを適用する. $26\delta_0 < x < 28\delta_0$ の領域において $y^+ < 5$ を粘性底層, $5 < y^+ < 30$ をバッファ層, $30 < y^+$ を対数領域として乱流運動エネルギーにPODを適用する. はく離泡は $26\delta_0 < x < 36\delta_0$ の領域において流れ方向速度が負となる領域と定義した. 境界層内では渦中心で圧力が低下するが, 反射衝撃波と圧縮波, 膨張波のみを取り扱いたいので, $\{(x, y) | 28\delta_0 < x < 35\delta_0, y > \delta_0\}$ の領域を圧力場と呼びPODを適用する.

Fig. 5に圧力場の固有モードを示す. 固有モードが0.0005となる面を赤色の等値面, 固有モードが-0.0005となる面を青色の等値面で示す. なお, 固有モードの符号は反転することがあるため物理的な圧力変動の正負とは必ずしも一致しない. Fig. 6に圧力の標準偏差を示す. 反射衝撃波と圧縮波の領域では標準偏差が4000以上の高い値をとっており変動が大きいといえる. Fig. 5 (a)の第1モードには反射衝撃波と圧縮波のような変動が大きい領域の構造が含まれる. 以降の固有モードには変動が小さい領域の構造も含まれるようになる. 次に寄与率の高い第2モードにはスパン方向に $2.5\delta_0$ 程度のスケールをもつ圧縮波の三次元的な構造が2つ確認される. 第5モ

ードと第6モードにははく離泡から出た膨張波の三次元的な構造が確認される.

Fig. 7にははく離泡の固有モードを示す. 固有モードが0.0004となる面を赤色の等値面, 固有モードが-0.0004となる面を青色の等値面で示す. 第1モードにはスパン方向に δ_0 程度のスケールをもつ構造が確認される. モード番号が大きくなるにつれ細かい構造が抽出されるようになり, 第100モードには非常に小さな構造が含まれることがわかる.

Fig. 8にPODモードの時間係数のパワースペクトル密度分布を示す. 横軸はストローハル数で, $St = f\delta_0/U_\infty$ とする. Fig. 8(a)は圧力場のPODモードの時間係数に関するものである. モードの番号が大きくなるにつれて高周波数域の成分のパワーが高くなることがわかる. これは番号が大きいPODモードには空間スケールが小さな構造が含まれるからだと考えられる. Fig. 8(b)にははく離泡のPODモードの時間係数のパワースペクトル密度分布が示されている. 番号の大きいモードにおいて $0.1 < St < 0.2$ にピークが確認されるが, 番号の小さいPODモードにはピークが確認されない. なお, $0.1 < St < 0.2$ は $50680 \text{ Hz} < f < 101360 \text{ Hz}$ に相当する.

5. Transfer Entropyを用いた因果推論

情報量は以下のように定義される^[14]. ある事象 x が起こる確率を $p(x)$ とすると, その事象のもつ情報量 $I(x)$ は式10のように定義できる.

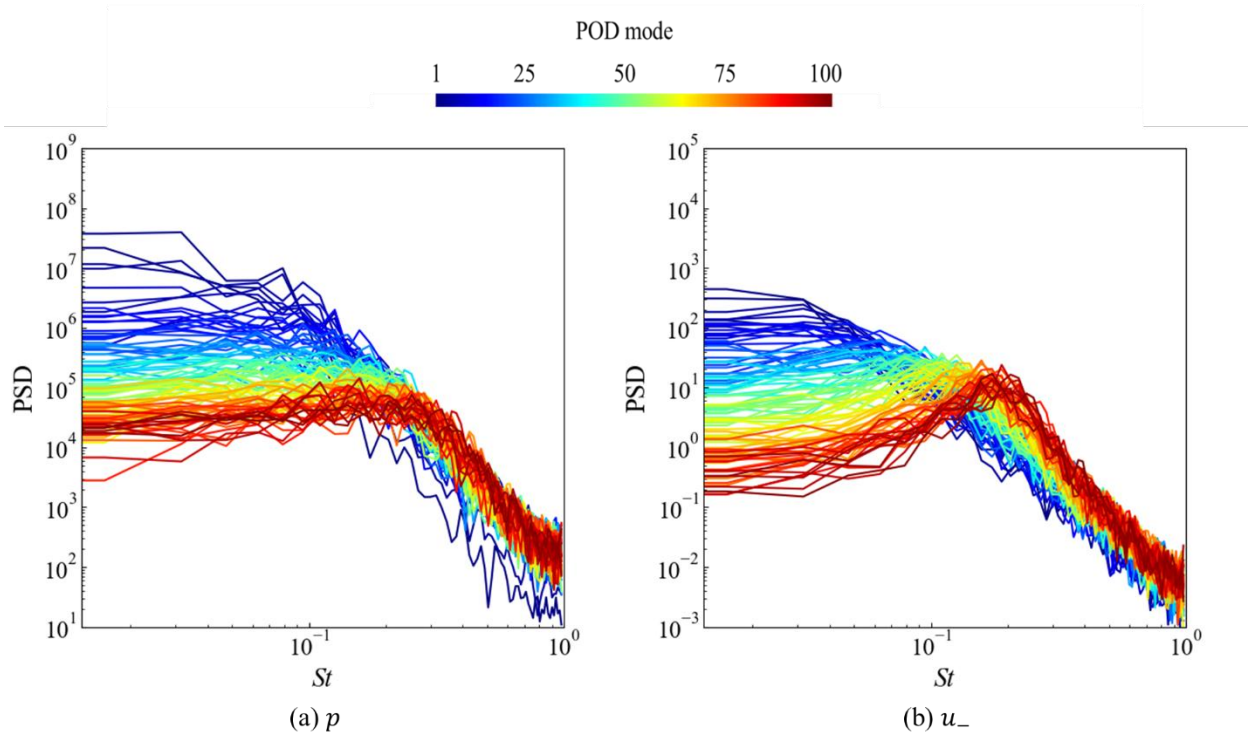


Fig. 8 Power spectral density of time coefficients of POD modes (a) pressure field, and (b) separation bubbles.

$$I(x) = -\log p(x) \quad (10)$$

これはある事象に対して決まる量で、その定義から発生確率が小さいほど大きな値を取ることがわかる。情報量 $I(x)$ の期待値はShannonエントロピーと呼ばれている量で、以下のように定義される。

$$H(X) = -\sum_x p(x) \log p(x) \quad (11)$$

これはある系において発生する確率的な事象の不確かさの指標である。また、複数の確率的なふるまいをする系を用意すると、それぞれの系の状態の組み合わせに対して同時確率を求めることができる。そのような場合に対しても以下のようにShannonエントロピーを定義することができる。

$$H(X, Y) = -\sum_{x, y} p(x, y) \log p(x, y) \quad (12)$$

これは2つの系 X と Y の場合であるが、一般に定義することも可能である。次に、このように複数の系の場合を考えると、互いの従属関係の強さを意味する量である相互情報量を式13のように定義することができる。

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (13)$$

この相互情報量 $I(X; Y)$ は非負という性質を持っており、0になるとき、系は互いに独立となる。さらに、ある系を観測した際に別の系のShannonエントロピーがどの程度減少するかを評価するために条件付きエントロピーが定義される。

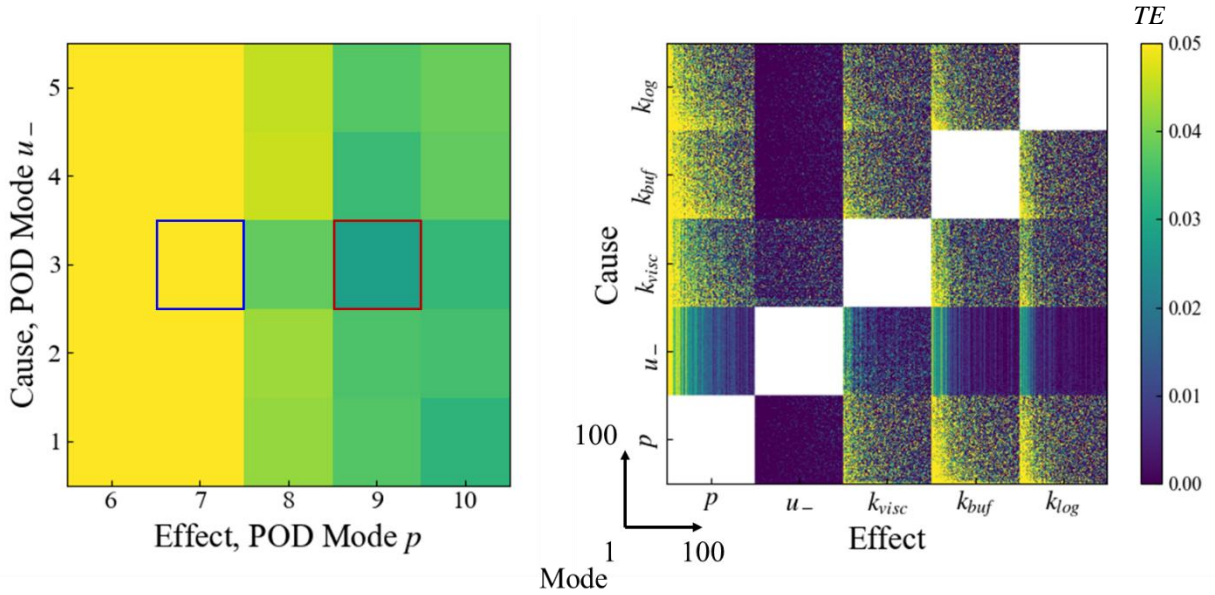
$$H(X|Y) = H(X) - I(X; Y) \quad (14)$$

式14で表される $H(X|Y)$ はある系 Y の状態を観測して、

状態を確定させたあとの系 X のShannonエントロピーである。Shannonエントロピーは系における状態の不確かさの指標であるので、系 X と系 Y が従属関係にあり、相互情報量 $I(X; Y)$ が0でない場合、系 Y の状態の観測が系 X の状態の不確かさを減少させることを意味している。この量を異なる時刻のデータに対して計算することで、系の状態における因果関係の強さを明らかにすることができる。因果推論のため定義された情報量はTransfer Entropyと呼ばれており、式15のように定義されている。

$$TE_{Y \rightarrow X} = H(X_t|X_{t-1}) - H(X_t|X_{t-1}, Y_{t-1}) \quad (15)$$

右辺第1項は系 X の $t-1$ の時刻を観測したときの時刻 t の条件付きShannonエントロピーである。第2項は系 Y の時刻 $t-1$ の状態を観測したうえで、系 X の時刻 $t-1$ の状態を観測した際の時刻 t における系 X の状態の不確かさである。すなわち系 Y の過去の状態の観測により系 X の不確かさがどれくらい減少するかをTransfer Entropyを用いて定量化することができる。これが意味するところとしては、過去の時刻の別の系の状態(系 Y の状態)を確定させることが、現在の時刻における別の系の状態(系 X の状態)の不確かさを減少させるということである。したがって、過去の Y の状態が現在の X の状態の原因の一つとなっているように考えることができる。これは、不確かさの減少量のみが関係して決まる量なので、系 X と系 Y の関係性に依存しないで関係性を評価できる点で優れており、非線形な関係を有していたとして



(a) Part of a causal map from u_- to p .

(b) A whole causal map.

Fig. 9 Causal relationship of pressure field, separation bubbles, viscous sublayer of upstream boundary layer, buffer layer of upstream boundary layer, and log layer of upstream boundary layer (a) part of a causal map from u_- to p (b) a whole causal map.

もその関係の強さを知ることができる。

実際のTransfer Entropyの計算は比較的誤差の小さいk最近傍法^[33]を用いて行う。なお、本研究では $k = 5$ とする。さらに、時系列をシャッフルして因果を破壊した系 Y_s を用意して以下に示すサロゲート解析を行い正味の因果を推定する^[34]。

$$\widehat{TE}_{Y \rightarrow X} = TE_{Y \rightarrow X} - TE_{Y_s \rightarrow X} \quad (16)$$

6. 衝撃波/境界層干渉の因果推論

Fig. 9に圧力場(p)、はく離泡(u_-)、上流の境界層の粘性底層(k_{visc})、バッファ層(k_{buf})、対数領域(k_{log})のPODモードの時間係数間の因果マップを示す。因果マップの見方について述べる。縦軸は原因、横軸は結果を表しており、それぞれ下、左から小さい番号のモードが並んでいる。Fig. 9 (a)はFig. 9(b)の一部を拡大したものである。例えば、青枠で示すはく離泡(u_-)の第3モードから圧力場(p)の第7モードへのTransfer Entropyは0.05以上で、赤枠で示すはく離泡(u_-)の第3モードから圧力場(p)の第9モードへのTransfer Entropyは約0.03である。なお、Fig. 9 (b)では同じ領域での異なるモード間の因果には注目していないため白色で塗りつぶしている。

はく離泡(u_-)から圧力場(p)へのTransfer Entropyは(Cause, Effect) = (u_- , p)の位置、圧力場(p)からはく離泡(u_-)へのTransfer Entropyは(Cause, Effect) = (p , u_-)の位置を見ればわかる。これよりはく離泡(u_-)の第1~100モードが圧力場(p)の番号の小さいモードを駆

動しているといえる。Fig. 7 (b)に示したはく離泡(u_-)の第100モードは一見するとノイズのようであるが、Fig. 8 (b)に示すように $0.1 < St < 0.2$ に有意なピークをもち、圧力場(p)への因果が確認されることから何らかの物理的な意味をもつと考えられる。

はく離泡(u_-)の他に上流の境界層(k_{visc} , k_{buf} , k_{log})から圧力場(p)へのTransfer Entropyも大きいことが(k_{log} , p)、(k_{buf} , p)、(k_{visc} , p)の領域からわかる。また、上流の境界層(k_{visc} , k_{buf} , k_{log})は圧力場(p)の番号の小さいモードだけでなく番号の大きなモードにも影響を与えていることも確認できる。

Effect = u_- の列を見ると、はく離泡(u_-)へのTransfer Entropyが大きいのは上流の境界層の粘性底層(k_{visc})のみである。特に、圧力場(p)からはく離泡(u_-)へのTransfer Entropyはほとんどゼロであることからはく離泡(u_-)から出た圧力波が圧力場(p)を駆動し、逆はないといえる。

粘性底層(k_{visc})へのTransfer Entropyが大きいのは境界層のバッファ層(k_{buf})、対数領域(k_{log})、はく離泡(u_-)、圧力場(p)である。圧力場(p)から粘性底層(k_{visc})へのTransfer Entropyは粘性底層(k_{visc})から圧力場(p)へのTransfer Entropyより小さいものの有意である。反射衝撃波の足は $28\delta_0 < x < 30\delta_0$ に位置しているが、境界層内を擾乱が伝播し、これより上流の境界層(k_{visc} , k_{buf} , k_{log})にも影響を及ぼしていることを示唆している。

バッファー層(k_{buf})と対数領域(k_{log})は互いに情報のやり取りをしており、バッファー層(k_{buf})から他の領域への因果の強さと対数領域(k_{log})から他の領域への因果の強さは同程度で、他の領域からバッファー層(k_{buf})への因果と他の領域から対数領域(k_{log})への因果の強さも同程度である。これはLozano-Duranら^[18]の結果と整合しており、バッファー層(k_{buf})と対数領域(k_{log})では物理的な因果関係のメカニズムが似通っていることが示唆される。粘性底層(k_{visc})と同様に、バッファー層(k_{buf})と対数領域(k_{log})では圧力場(p)からのTransfer Entropyも確認される。

以上より上流の境界層(k_{visc})→はく離泡(u)→圧力場(p)→上流の境界層(k_{visc} , k_{buf} , k_{log})という情報のフィードバックループがあるといえる。

7. 結言

本研究では $M = 1.9$, $Re_\theta = 1327$, $\beta = 39.27^\circ$ の衝撃波/境界層干渉のDNSを実施した。衝撃波、はく離泡、上流の境界層にPODを適用し、圧縮波とはく離泡にスパン方向に $\delta_0 \sim 2\delta_0$ の幅をもつ三次元構造を確認した。はく離泡のPODモードの番号が大きいものは非常に細かな構造をもつが、時間係数のパワースペクトル密度は $0.1 < St < 0.2$ で有意なピークをもつことがわかった。

さらに、PODモード同士のTransfer Entropyを計算することで因果推論を実施した。その結果、まずはく離泡から圧力場への因果が確認された。これははく離泡の出す圧力波が反射衝撃波の振動を駆動していることを意味していると考えられる。次に、圧力場から上流の境界層への因果があることが確認された。これは、反射衝撃波の振動が上流の境界層へ影響を与えていることを意味している。最後に、上流の境界層の粘性底層からはく離泡への因果が示唆されたことから、はく離泡の振動は上流の粘性底層二存在した擾乱が原因である事がわかった。以上のことをまとめると、上流の境界層→はく離泡→圧力場→上流の境界層という情報のフィードバックループが存在することが示唆された。

謝辞

本研究は科研費23K22954（22H01684）の助成を受けました。また、若手女性利用課題を通じて、東京大学情報基盤センターが提供するスーパーコンピュータ「Wisteria/BDEC-01」の計算資源の提供を受けました。さらに岡山大学コアファシリティ(CFPOU Engineering_001 Engineering_002)の支援を受けて実施しました。ここに謝意を表します。

参考文献

- [1] B. Ganapathisubramani, N. T. Clemens and D. S. Dolling, "Low-frequency dynamics of shock-induced separation in a compression ramp interaction," *J. Fluid Mech*, vol. 636, pp. 397-425, 2009.
- [2] R. A. Humble, G. E. Elsinga, F. Scarano and B. W. v. Oudheusden, "Three-dimensional instantaneous structure of a shock wave/turbulent boundary layer interaction," *J. Fluid Mech*, vol. 622, pp. 33-62, 2009.
- [3] E. Touber and N. D. Sandham, "Large-eddy simulation of low-frequency unsteadiness," *Theor. Comput. Fluid Dyn*, pp. 79-107, 2009.
- [4] S. Piponniau, J. P. Dussauge, J. F. Debieve and P. Dupont, "A simple model for low-frequency unsteadiness in shock-induced separation," *J. Fluid Mech*, vol. 629, pp. 87-108, 2009.
- [5] A. Ceci, A. Palumbo, J. Larsson and S. Pirozzoli, "On low-frequency unsteadiness in swept shock wave-boundary layer interactions," *J. Fluid Mech*, vol. 956, 2023.
- [6] C. Cura, A. Hanifi, A. V. G. Cavalieri and J. Weiss, "On the low-frequency dynamics of turbulent separation bubbles," *J. Fluid Mech*, vol. 991, 2024.
- [7] D. J. Lusher, A. Sansica, M. Zanner and A. Hashimoto, "High-fidelity study of three-dimensional turbulent transonic buffet on wide-span infinite wings," *arXiv*, 2024.
- [8] N. A. Adams, "Direct simulation of the turbulent boundary layer along a compression ramp at $M = 3$ and $Re = 1685$," *J. Fluid Mech*, vol. 420, pp. 47-83, 2000.
- [9] S. Priebe and M. P. Martin, "Low-frequency unsteadiness in shock wave-turbulent boundary layer interaction," *J. Fluid Mech*, vol. 699, pp. 1-49, 2012.
- [10] S. Priebe, M. Wu and M. P. Martin, "Direct Numerical Simulation of a Reflected-Shock-Wave/Turbulent-Boundary-Layer Interaction," *AIAA J*, vol. 5, p. 47, 2009.
- [11] S. Pirozzoli and F. Grasso, "Direct numerical simulation of impinging shock wave/turbulent boundary layer interaction at $M = 2.25$," *Phys. Fluids*, vol. 18, 2006.
- [12] K. Sasaki, D. C. Barros, A. V. G. Cavalieri and L. Larcheveque, "Causality in the shock wave/turbulent boundary layer interaction," *Phys. Rev. Fluids*, vol. 6, no. 064609, 2021.
- [13] K. Sasaki, R. Vinuesa, A. V. G. Cavalieri, P. Schlatter and D. S. Henningson, "Transfer functions for ow predictions in wall-bounded turbulence," *J. Fluid Mech*, vol. 864, pp. 708-745, 2019.
- [14] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379-423, 1948.
- [15] T. Schreiber, "Measuring Information Transfer," *Phys. Rev. Lett*, vol. 85, no. 2, pp. 461-464, 2000.

- [16] L. Barnett, A. B. Barrett and A. K. Seth, "Granger Causality and Transfer Entropy Are Equivalent for Gaussian Variables," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, no. 238701, 2009.
- [17] J. Shi, L. Chen and K. Aihara, "Embedding entropy: a nonlinear measure of dynamical causality," *J. R. Soc. Interface*, vol. 19, no. 20210766, 2022.
- [18] A. Lozano-Duran, H. J. Bae and M. P. Encinar, "Causality of energy-containing eddies in wall turbulence," *J. Fluid Mech.*, vol. 882, 2020.
- [19] R. Araki, A. Vela-Martin and A. Lozano-Duran, "Forgetfulness of turbulent energy cascade associated with different mechanisms," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 2753, 2024.
- [20] T. Tanogami and R. Araki, "Information-thermodynamic bound on information flow in turbulent cascade," *Phys. Rev. Research*, vol. 6, no. 1, 2024.
- [21] T. Tanogami and R. Araki, "Scale-to-scale information flow amplifies turbulent fluctuations," *Phys. Rev. Research*, vol. 7, no. 023078, 2025.
- [22] A. Martinez-Sanchez, G. Arranz and A. Lozano-Duran, "Decomposing causality into its synergistic, unique, and redundant components," *Nat Commun*, 2024.
- [23] G. Arranz and A. Lozano-Duran, "Assessment of information-theoretic-based control of turbulent flow separation of an aircraft in stall," *AIAA SciTech Forum*, 2022.
- [24] W. F. M, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1974.
- [25] K. Kitamura and A. Hashimoto, "Reduced dissipation AUSM-family fluxes:HR-SLAU2 and HR-AUSM+-up for high resolution unsteady flow simulation," *Computers Fluids*, vol. 126, no. 1, pp. 41-57, 2016.
- [26] H. Chandravamsi and S. H. Frankel, "High Resolution Optimized High-Order Schemes for Discretization of Non-Linear Straight and Mixed Second Derivative Terms," *arXiv*, 2024.
- [27] S. Yamamoto and H. Daiguji, "Higher-Order-Accurate Upwind Schemes for Solving the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations," *Computers Fluids*, vol. 22, no. 2/3, pp. 259-270, 1993.
- [28] S. Gottlieb and C.-W. Shu, "Total variation diminishing Runge-Kutta schemes," *Math. Comput.*, vol. 67, pp. 73-85, 1998.
- [29] P. Sagaut, E. Garnier, E. Tromeur, L. Larcheveque and E. Labourasse, "Turbulent Inflow Conditions for Large Eddy Simulation of Compressible Wall-Bounded Flows," *AIAA J.*, vol. 42, no. 3, pp. 469-477, 2004.
- [30] M. P. Simens, J. Jimenez, S. Hoyas and Y. Mizuno, "A high-resolution code for turbulent boundary layers," *J. Comput. Phys.*, vol. 228, pp. 4218-4231, 2009.
- [31] P. Spalart, M. Strelets and A. Travin, "Direct numerical simulation of large-eddy-break-up devices in a boundary layer," *Int. J. Heat Fluid*

Flow, vol. 27, no. 5, 2006.

- [32] G. Mengaldo, D. De Grazia, J. Peiro, F. D. Witherden, P. E. Vincent and S. J. Sherwin, "A Guide to the Implementation of Boundary Conditions in Compact High-Order Methods for Compressible Aerodynamics," *AIAA*, 2014.
- [33] A. Kraskov, H. Stogbauer and P. Grassberger, "Estimating mutual information," *Phys. Rev. E*, vol. 69, 2004.
- [34] B. Gourevitch and J. J. Eggermont, "Evaluating Information Transfer Between Auditory Cortical Neurons," *J. Neurophysiol.*, vol. 97, no. 3, pp. 2533-2543, 2007.

付録

先行研究^[17]にならって、本研究で実装したTransfer Entropyを計算するプログラムの検証を行う。 $\gamma_x = 3.7$, $\gamma_y = 3.72$ として、 x から y への因果の強さを制御する β_{xy} と y から x への因果の強さを制御する β_{yx} を変化させてテストを行う。なお、初期条件は $x_0 = 0.4$, $y_0 = 0.6$ として、平均0、標準偏差0.01のノイズ $\epsilon_{x,t}$, $\epsilon_{y,t}$ を加えて時間発展させる。

$$x_{t+1} = x_t \{ \gamma_x - (\gamma_x - \beta_{yx})x_t - \beta_{yx}y_t \} + \epsilon_{x,t} \quad (17)$$

$$y_{t+1} = y_t \{ \gamma_y - (\gamma_y - \beta_{xy})y_t - \beta_{xy}x_t \} + \epsilon_{y,t} \quad (18)$$

Fig. 10に示すように $\beta_{yx} = 0$ とした場合は常に $TE_{y \rightarrow x} < TE_{x \rightarrow y}$ である。 $\beta_{yx} = 0.1$ とした場合は $\beta_{xy} < 0.1$ では $TE_{x \rightarrow y} < TE_{y \rightarrow x}$ となり、 $0.1 < \beta_{xy}$ では $TE_{y \rightarrow x} < TE_{x \rightarrow y}$ となる。以上よりTransfer Entropyで妥当な因果推論が実施できているといえる。

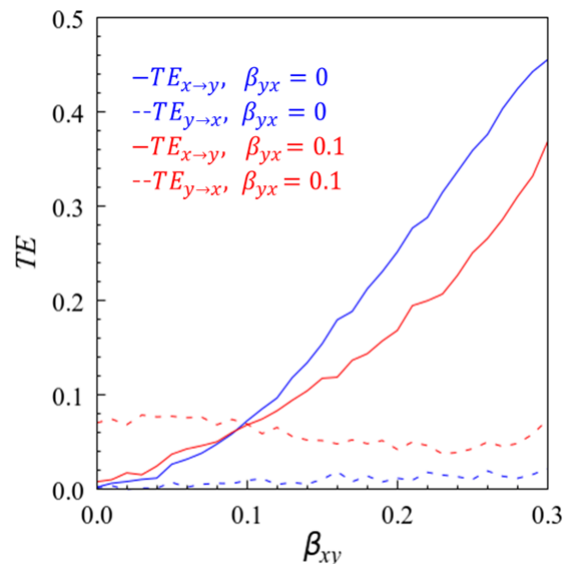


Fig. 10 Causality on unidirectional and bidirectional coupling systems.