

2B01 PIVデータとRANSシミュレーションを用いたデータ同化 による実験条件の超音速ジェットのリゾルベント解析

○RENWEI WANG（名古屋大学），小澤雄太（JAXA），永田貴之，野々村拓（名古屋大学）

Data Assimilation-Based Resolvent Analysis of a Supersonic Jet under Experimental Conditions
using PIV Data and RANS Simulations

Renwei Wang (Nagoya University), Yuta Ozawa (JAXA), Takayuki Nagata, Taku Nonomura (Nagoya University)

Key Words: Supersonic Jet, Resolvent Analysis, Data Assimilation, Mach number, Strouhal number, Azimuthal mode

Abstract

We performed a resolvent analysis of axisymmetric supersonic jets by applying a MATLAB-based two-dimensional resolvent solver (Linstab2D) to the compressible Navier–Stokes equations linearized about data-assimilated base flows, and the effects of Mach number, Strouhal number, and azimuthal mode on Mach-wave propagation were investigated. Particle image velocimetry was used to optimize the Menter SST parameters in Reynolds-averaged Navier–Stokes simulations, yielding time-averaged flow fields for supersonic jets at Mach 1.2, 1.5, 1.8, and 2.0 as the base flows. Resolvent analysis of the data-assimilated base flows revealed clear Mach-wave propagation patterns at Mach 1.5, 1.8, and 2.0. Furthermore, the Mach-wave propagation angle increases and shift the acoustic source location further downstream as the jet Mach numbers increase. On the other hand, variations in the Strouhal number did not significantly alter the propagation angle or the acoustic source position for fixed Mach numbers. The maximum gain always exists at azimuthal mode of $m = 0$ (axisymmetric mode).

1. はじめに

超音速ジェットから放射される強い音波は、空港やロケット発射場での騒音公害や機体の破損を引き起こす。そのため、長年にわたり、騒音発生メカニズムが研究されてきた。しかし、乱流の複雑性とランダム性⁽¹⁾ゆえに、超音速ジェットの乱流モデル化はいまだ研究対象である。近年、コンピューターの計算能力が飛躍的に向上したことで、Reynolds平均Navier–Stokes (RANS)シミュレーション⁽²⁾、ラージ・エディシミュレーション(LES)⁽³⁾、および直接数値シミュレーション(DNS)⁽⁴⁾手法により、一定の条件における乱流の実験データを再現できるようになった。しかし、これらの手法にはそれぞれ欠点がある。RANSシミュレーションでは流動条件に合わせた複数回のパラメータ調整が必要であり、LESおよびDNSはいずれも高い計算コストを要する。したがって、主要な物理構造を抽出しつつ、産業応用にも耐えうる安定な低次元モデルの構築は重要な研究課題である。

Mollo–Christensen⁽⁵⁾およびCrow and Champagne⁽⁶⁾の研究により、一見無秩序に見える乱流ジェット中に秩序構造(Coherent Structure)が存在することが示された。これらは乱流混合層内で成長と減衰を繰り返すウェーブパケット(Wave packets)⁽⁷⁾であり、乱流中のエネルギー輸送および音波放射に重要な役割を

果たす⁽⁸⁾。そのため、平行流仮定⁽⁹⁾、漸進展開法(WKB)⁽¹⁰⁾、放物型安定方程式(PSE)⁽¹¹⁾といった手法がウェーブパケットのモデル化に用いられてきた。これらの手法は超音速ジェットにおける大部分の音場特性を再現する。

これらを踏まえ、さらにマッハ波の放射、すなわち超音速ジェットの主な音響波放射メカニズム⁽¹²⁾を捉えるため、本研究ではレゾルベント解析⁽¹³⁾を採用する。この手法は、方程式を線形化し、Navier–Stokesの非線形項から生ずる項を外部入力として、流れの応答を調べるために利用される。Navier–Stokes方程式を平均流れ場の擾乱に対する線形項と非線形項に分解することで、両者を結ぶレゾルベントオペレーターを構築し、特異値(SVD)分解によってゲインを持つ入力モードを同定、順位付けする。これらの入力モードは、線形増幅メカニズムを通じて近傍場の乱流および遠方場の音場においてエネルギー相関構造を生成する。また、支配的な入出力の関係を特異値に参照して自動的に選択できるため、レゾルベント解析は高精度な低次元モデルを提供する。

本研究では、超解像計測⁽¹⁴⁾でのレゾルベントモードの利用可能性を検討するため、データ同化によって得られた超音速ジェットのベースフローデータ

を使用した．マッハ数1.2, 1.5, 1.8および2.0に対応する4種類のデータに対してレゾルベント解析を適用し，応答モードへのマッハ数の影響を調べる．また，計算条件を変更し，異なるストローハル数および周方向モードが解析結果に与える影響を検討した．

2. 解析手法
2.1 ベースフロー

レゾルベント解析はベースフロー周りでの不安定性を抽出するものであり，ベースフローにはNavier-Stokes方程式の近似解や平均場が用いられる．本研究では平均流れ場を採用する．計算流体力学(CFD)のデータを直接用いて解析することも可能であるが，計算コストおよび精度に関する問題が残る．そこで本研究では，実験とデータ同化を組み合わせた数値シミュレーションによりベースフローデータを構築した．まず，異なるマッハ数における軸対称超音速ジェット流れに対して粒子画像流速測定法(PIV)⁽¹⁵⁾を実施し，平均速度場を取得した．次に，Menterのせん断応力輸送モデル(SST)⁽¹⁶⁾を用いてRANSシミュレーションを行い，実験と同一条件の流れを再現した．この過程でデータ同化技術⁽¹⁷⁾を適用し，PIVで得られた速度場にRANSシミュレーションの結果が近づくようにSSTモデルのパラメータを最適化した．

2.1.1 実験装置

本研究では，理想拡張超音速ジェットに対して粒子画像流速測定法(PIV)を行い，得られた速度場をデータ同化に適用した．PIV計測は東北大学に設置されたジェット発生装置付き無響室で実施した．適正膨張条件下の4種類の超音速ジェットを対象とし，それぞれのジェット条件を表1にまとめた．各マッハ数に対応する適正膨張ノズルは特性線法を用いて設計し，全ノズルの出口直径は10 mmである．

表1 超音速ジェットの条件				
マッハ数	1.2	1.5	1.8	2.0
圧力比	2.42	3.67	5.75	7.82
速度 [m/s]	361	425	480	510
レイノルズ数($\times 10^5$)	3.8	5.5	7.9	10

PIV計測については，高繰り返しダブルパルスレーザー(DM60-527, Photonics Industries)および高速カメラ(Phantom V2640, Vision Research)を用いて実施した．シーディング粒子はLaskinノズルによって生成し，ジェット流中および雰囲気中に分散させた．撮像時間間隔は1 μ sに設定し，サンプリング周波数3 kHzで画像ペアを取得した．得られた粒子画像はシングルピクセルアンサンブル相関法⁽¹⁸⁾を用いて解析し，画素

ごとの時間平均速度場を計算した．この手法では時間平均速度場しか算出できないものの，空間分解能が非常に高く，データ同化への適用に適する．図1にPIV実験装置の模式図を示す．

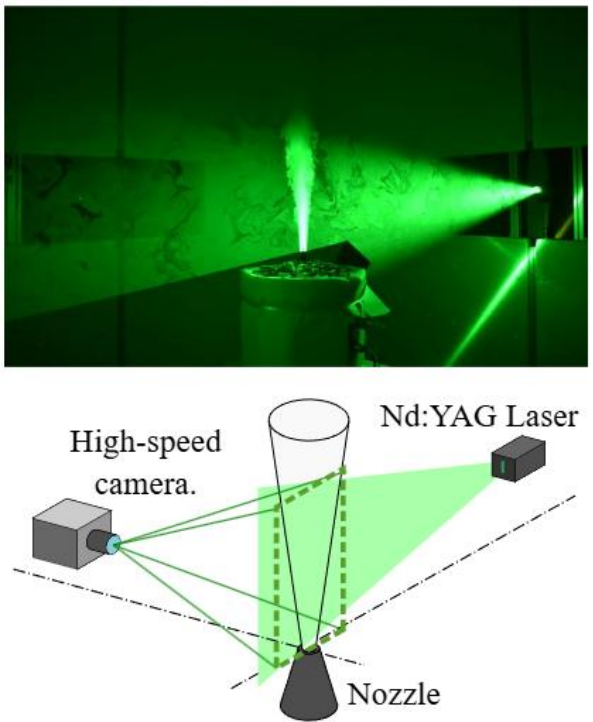


図1 PIV測定の実験装置

2.1.2 数値シミュレーション

本研究では，スタンフォード大学が開発したオープンソースソルバSU2⁽¹⁹⁾を用いて二次元軸対称RANSシミュレーションを実施した．Gmshにより生成した二次元計算格子および境界条件を図2に示す．計算領域は，ノズル軸方向はノズル出口を $x/D = 0$ として $0 < x/D < 30$ ，半径方向はノズル中心軸を $r/D = 0$ として $0 < r/D < 10$ と定義し，ノズル内部領域も含めて解析した．乱流モデルにはMenterのSSTモデルを採用した．8つのハイパーパラメータのデフォルト値を表2に示す．しかし，これらのデフォルト設定では実験で得られた速度場を十分に再現できなかった．そこでRANSシミュレーションにデータ同化を適用し，RANSシミュレーションの結果が実験データに近づくようにSSTパラメータを最適化した．最適化したSSTパラメータを表3に示す．

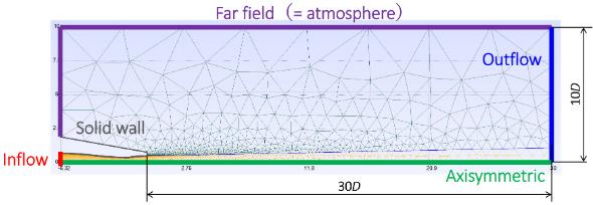


図2 境界条件と計算グリットの模式図

表2 デフォルトのSSTパラメータ

σ_{k1}	σ_{k2}	$\sigma_{\omega 1}$	$\sigma_{\omega 2}$	β_1	β_2	β^*	a
0.85	1.0	0.5	0.856	0.075	0.0828	0.09	0.31

表3 最適化されたSSTパラメータ

σ_{k1}	σ_{k2}	$\sigma_{\omega 1}$	$\sigma_{\omega 2}$	β_1	β_2	β^*	a
0.474	0.574	0.393	0.634	0.070	0.102	0.080	0.434

2.1.3 データ同化

本研究では、数値シミュレーションへの適用が容易なデータ同化手法としてアンサンブルカルマンフィルタ(ensemble Kalman filter)⁽²⁰⁾を採用した。図3にデータ同化の模式図を示す。まず、デフォルトSSTパラメータで計算した流れ場を初期解とし、初回計算にはデフォルト値からランダム変更したSSTパラメータを用いる。次に、SSTパラメータと更新後の流れ場をアンサンブルカルマンフィルタに入力し、フィルタ処理によって更新されたSSTパラメータを算出する。その後、フィルタ処理後のSSTパラメータを用いて再度RANSシミュレーションを実行し、同じプロセスを繰り返す。本研究ではアンサンブルメンバー数を $N = 16$ に設定し、SSTパラメータを20回更新した。

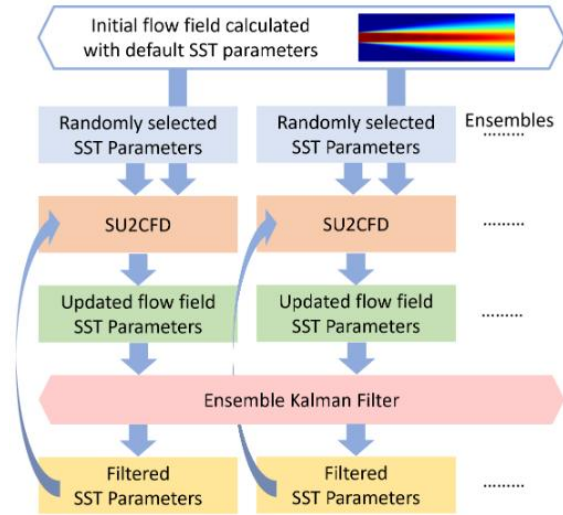


図3 アンサンブルカルマンフィルタとSU2を用いたデータ同化の模式図

アンサンブルカルマンフィルタは、非線形システムの状態方程式および観測方程式を以下のように定義する。

$$\mathbf{x}_t^{(l)} = f(\mathbf{x}_{t-1}^{(l)}). \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_t^{(l)} = \mathbf{H}_t^{(l)} \mathbf{x}_t^{(l)} + \mathbf{w}_t^{(l)}. \quad (2)$$

ここで、 f は状態ベクトルを更新する関数を表す、本研究ではSU2を用いたRANSシミュレーションに

応ずる。また、 \mathbf{y} , \mathbf{H} , \mathbf{w} はそれぞれ観測ベクトル、観測行列、観測ノイズを表す。アンサンブルメンバーの番号 l は $1 < l \leq N$ とし、 $\mathbf{H}_t \mathbf{x}_t^{(l)}$ はRANSシミュレーションで得られた速度場をPIVの速度ベクトル格子へ写像する作用に相当する。流れ場の状態ベクトル $\mathbf{x}_t^{(l)}$ と観測行列 $\mathbf{H}_t^{(l)}$ は、次の式のように定義される：

$$\mathbf{x}_t^{(l)} = [\mathbf{x}_{CFD}^T, \mathbf{x}_{OBS}^T, \mathbf{x}_{SST}^T]^T. \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_t^{(l)} = [\mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{0}]. \quad (4)$$

\mathbf{x}_{CFD}^T は、密度 ρ 、運動量 ρu , ρv , エネルギー e , 乱流運動エネルギー k , 乱流周波数 ω を含む状態ベクトルである。また、観測ベクトルは、PIV測定格子に写像された速度場を表す。 \mathbf{x}_{SST}^T はSSTモデルのパラメータをまとめたベクトルであり、これらのパラメータは時不変である。さらに、 \mathbf{I} は単位行列であり、 $\mathbf{H}_t^{(l)}$ 内の0の位置は、 $\mathbf{H}_t^{(l)} \mathbf{x}_t^{(l)} = \mathbf{x}_{OBS}^T$ を満たすように決定される。

アンサンブルカルマンフィルタの過程は、以下の式を用いて計算される：

$$\mathbf{x}_t^{(l)} = \mathbf{x}_t^{(l)} + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t^{(l)} + \mathbf{w}_t^{(l)}). \quad (5)$$

\mathbf{K}_t はカルマンゲインであり、次の式により定義される。

$$\mathbf{K}_t = \bar{\mathbf{V}}_t \mathbf{H}_t^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}_t \bar{\mathbf{V}}_t \mathbf{H}_t^T)^{-1}. \quad (6)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{V}}_t$ は各アンサンブルメンバーとアンサンブル平均値との差異から算出される分散 - 共分散行列である。 \mathbf{R} は観測ノイズの分散 - 共分散行列を表し、本研究ではすべての観測点においてノイズが相互干渉を伴わないものと仮定した。そのため、 \mathbf{R} は対角行列として簡略化される：

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (7)$$

ここで、 σ は観測ノイズの標準偏差である。

2.1.4 データ同化の結果

図4に、データ同化後に得られたマッハ数4条件の超音速ジェット的主流方向速度場を示す。これらの結果に対してレゾルベント解析を行う。

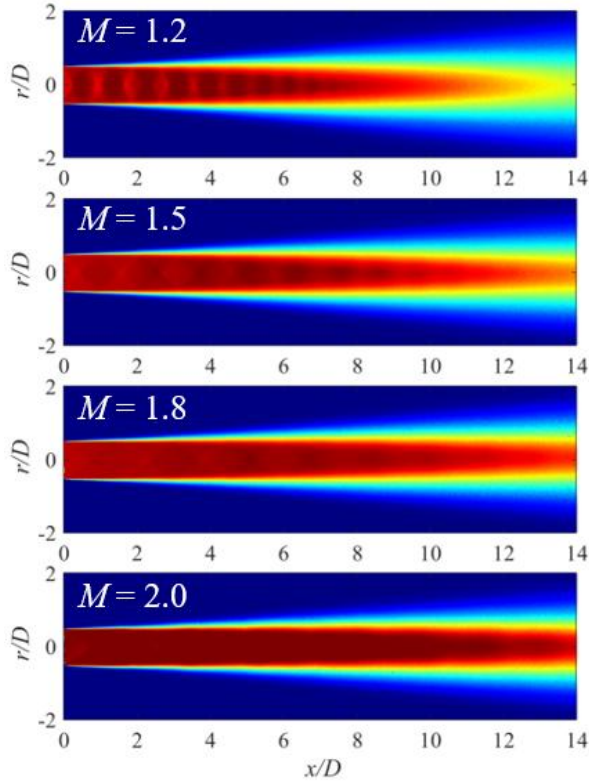


図4 主流方向速度の流れ場

2.2 レゾルベント解析

圧縮性Navier-Stokes方程式は以下のように表される：

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{q}). \quad (8)$$

ここで、 \mathbf{q} は流れの状態変数ベクトル、 $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ はNavier-Stokes方程式の非線形項を表す。レイノルズ分解を用いることで、変数 \mathbf{q} を時間平均項 $\bar{\mathbf{q}}$ と変動項 \mathbf{q}' に分解できる：

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t). \quad (9)$$

式(8)に代入した後、テイラー展開を用いて、方程式は以下のように変形される：

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{q}' + \mathbf{f}. \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}})$ はシステムのヤコビ行列、すなわち線形演算子である。 \mathbf{f} は外部入力、すなわちNavier-Stokes方程式の非線形項である。その後、変動項 \mathbf{q}' と外部入力 \mathbf{f} にフーリエ変換を適用すると：

$$\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}''(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (11)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}''(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (12)$$

となる。これらを式(10)に代入すると、システムの外部入力と応答との間の伝達関数が下記のように導出される：

$$(i\omega I - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}))\mathbf{q}'' = \mathbf{f}''. \quad (13)$$

$$\mathbf{R}(\omega) = (i\omega I - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}))^{-1}. \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{R}(\omega)$ はレゾルベントオペレーターである。システムが異なる周波数の強制入力に対して示す増幅効果をより精密に解析するために、さらに圧縮性エネルギーノルム⁽²¹⁾による重み付けを導入する：

$$\mathbf{W} = \text{diag}\left(\frac{\bar{T}}{\gamma\bar{\rho}M^2}, \bar{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\rho}, \frac{\bar{\rho}}{\gamma(\gamma-1)\bar{T}M^2}\right). \quad (15)$$

この重み行列により、レゾルベントオペレータを下記のように重み付けする。

$$\tilde{\mathbf{R}}(\omega) = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}(\omega) \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

続いて、 $\tilde{\mathbf{R}}(\omega)$ に対して特異値分解を行う：

$$\tilde{\mathbf{R}}(\omega) = \mathbf{U}(\omega)\boldsymbol{\Sigma}(\omega)\mathbf{V}(\omega)^H. \quad (17)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Sigma}$ は特異値 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ を対角成分に有する対角行列、最大の特異値が求める最大ゲインとなり、それに対応する右特異ベクトル \mathbf{V}_1 が強制モード、左特異ベクトル \mathbf{U}_1 が応答モード(レゾルベントモード)である。

2.3 計算手法

MATLABベースの二次元レゾルベント解析ツールであるLinstab2D⁽²²⁾を使用する。データ同化によって得られたベースフローを等間隔の軸対称格子(x/D 方向600点、 r/D 方向240点)にマッピングして解析を行った。無次元化に関しては、ノズル出口の流速、さらに周囲温度と密度を基準量とした無次元化を行った。外部境界条件については、圧力波などの反射を防ぐため、スポンジ層を設定した。下図に、マッピング後の結果とスポンジ層の設定位置を示す。

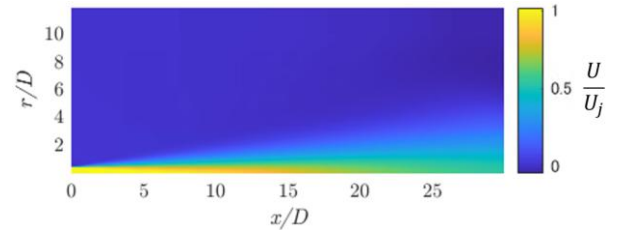


図5 主流方向速度のマッピング結果 ($M = 2$)

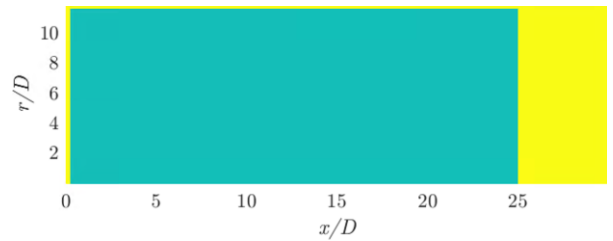


図6 スポンジ層(黄色)の位置

3. 結果と考察

図7に、レゾルベント解析により得られた $M = 1.5$, $m = 0$, $St = 0.3$ での主流方向速度のレゾルベントモードを示す。ノズル出口付近においては数値振動により高波数の構造が現れるが、下流側では比較的低波

数の周期的な構造が得られる．さらに，マッハ波の放射に対応する構造がある．これにより，超解像計測の実験データにレゾルベント解析を適用できることを実証する．

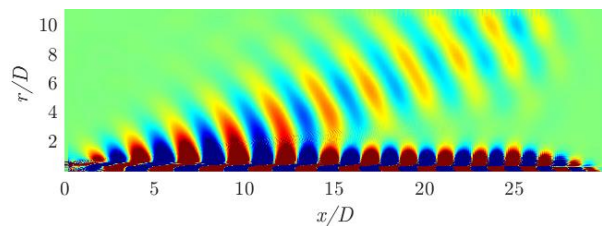


図7 主流方向速度のレゾルベントモード
($M = 1.5$, $m = 0$, $St = 0.3$)

3.1 マッハ数とストローハル数の影響

図8に $m = 0$, $St = 0.3$ の条件下における4種類の異なるマッハ数に対する応答モードを示す．

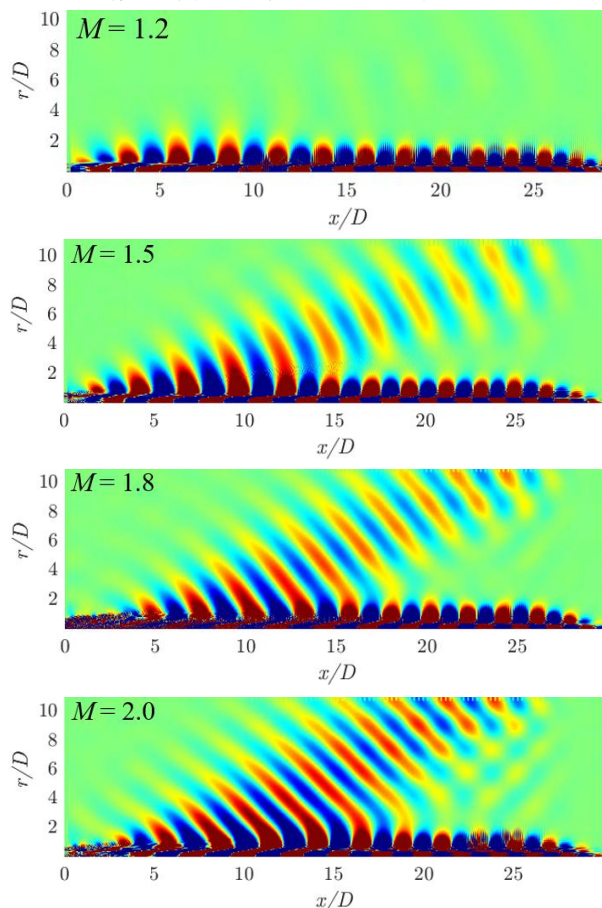


図8 主流方向速度のレゾルベントモードに対するマッハ数の影響($m = 0$, $St = 0.3$)

$M = 1.2$ の場合は，比較的小さい出口マッハ数のために流れ中心部に周期構造のみが現れ，明確なマッハ波は観測されなかった．一方，マッハ数が1.5を超えるとマッハ波の放射現象が明確に認められた．また，流速の増大に伴い，擾乱に対するレゾルベントゲインが増大し，高強度かつ広帯域のマッハ波構造が

下流側へと伝播する．同時に，マッハ数の増大に伴い，マッハ波の放射位置は下流側へ移動し，放射角度は大きくなる． possible理由は，高マッハ数のジェットほど圧縮性効果によりせん断層不安定性の成長率が低下し，乱流化に必要な発展距離が延びるためである．その結果，せん断層で生成する渦構造がより下流側で発達し，音源位置が下流に移動する．

音源位置やマッハ波の放射角度に対するマッハ数やストローハル数の影響をさらに検討するため，下図に示すようにレゾルベントモードに対して振幅の絶対値を計算した．さらに，各 r において振幅が最大となる点を抽出し，これらの点に直線フィッティングを適用した．この手法により，音波の伝播角度および音源位置の変化を調べた．

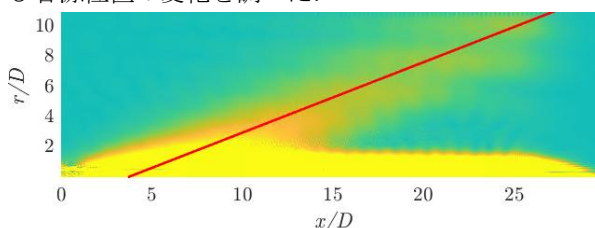


図9 主流方向速度のレゾルベントモードの絶対値分布と各 r における絶対値最大点を用いて線形フィッティングして推定した音波伝播方向(赤線, $M = 1.5$, $m = 0$, $St = 0.3$)

異なるストローハル数($0.3 \leq St \leq 0.5$)における線形フィッティングした直線の角度(図9における赤線と噴流中心軸とのなす角)および噴流中心 x 軸との交点を算出した結果を，図10に示す．

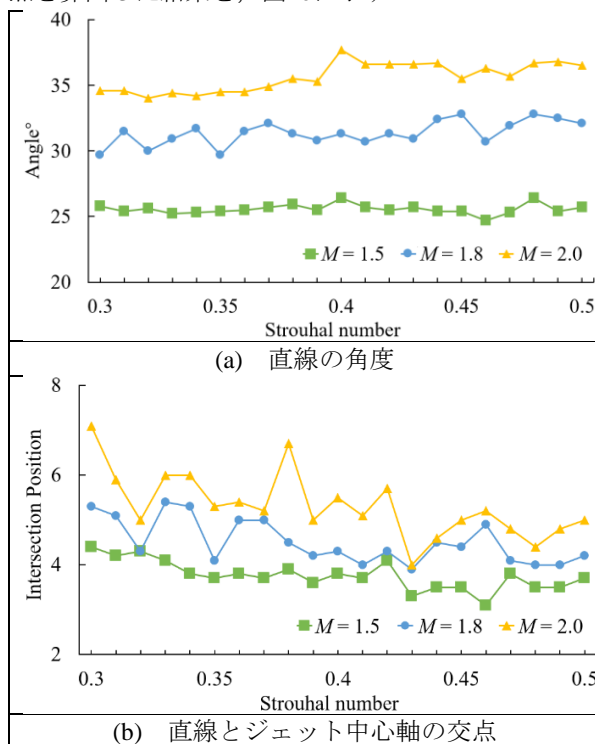


図10 主流方向レゾルベントモードの絶対値分布から推定したマッハ波放射角度と音源位置に対するマッハ数とストローハル数の影響

図より、マッハ数の増加に伴い、マッハ波の放射角度が大きくなり、噴流中心軸との交点も概ね下流側へ移動する。これは前述の観察結果と一致する。また、同一マッハ数条件下では、ストローハル数の変化はマッハ波放射に顕著な影響を与えない。

3.2 周方向モードの影響

周方向モードは、円周方向波数および螺旋特性を表し、以下では、 $M = 2.0$, $St = 0.3$ の場合について、 $0 \leq |m| \leq 3$ の周方向モードでの解析結果を示す。

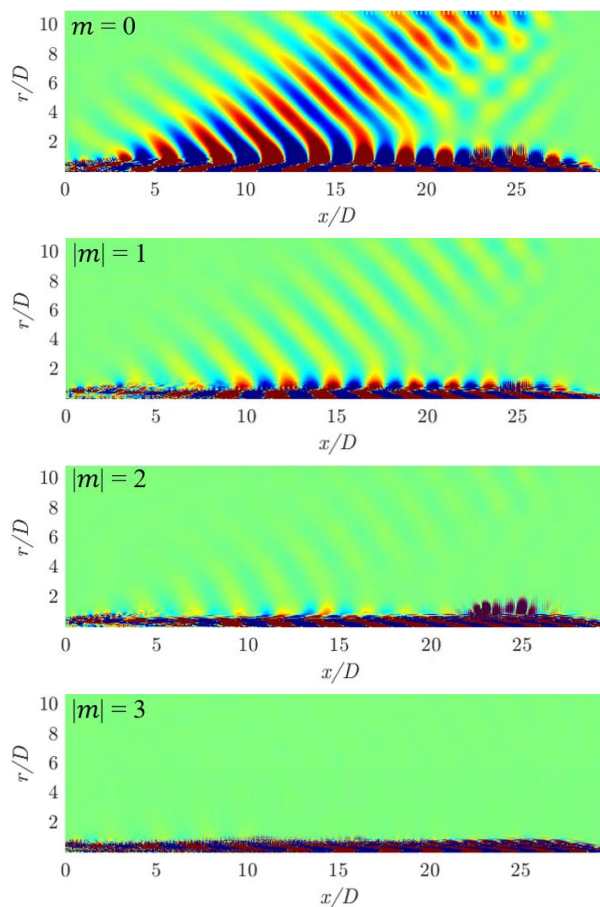


図11 レゾルベントモードに対する方位角モードの影響($M = 2.0$, $St = 0.3$)

$m = 0$ (軸対称モード)の場合に最も高い応答振幅、すなわち最大のレゾルベントゲインを示す。方位モード数 m が大きい場合にゲインは小さい、さらに、周方向モードの次数 m の増大に伴い、中心領域における周期的な構造は観測しにくくなり、数値振動による成分が支配的である。これは、検討した $M = 2.0$ の超音速ジェットにおいて、擾乱が最も増幅されるのが軸対称モードであり、このモードがジェットせん断層

の不安定性および騒音生成メカニズムを支配することを示す。同様の傾向は $M = 1.8$ および $M = 1.5$ でも見られた。

4. 結言

本研究では、PIVデータを利用し、データ同化を適用して得た超音速ジェットの時間平均場に対してレゾルベント解析を行うことで、高解像度計測データに対するレゾルベント解析の可能性を検証した。同時に、明確なマッハ波放射現象を観測した。さらに、マッハ数の増加によりマッハ波の放射角度が大きくなり、音源が下流方向へ移動することを確認した。一方、同一マッハ数条件下では、ストローハル数の変化がマッハ波放射に顕著な影響を及ぼさないことを観察した。また、最大のゲインモードは常に $m = 0$ (軸対称モード)であった。

謝辞

本研究は科研費基盤研究B(JP25K01421)および若手研究(23K13492)の支援を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- (1) Karman, T. von. "Some remarks on the statistical theory of turbulence". Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge, MA (1938), 347
- (2) Launder, B. E. and D. B. Spalding. "The numerical computation of turbulent flows". Numerical prediction of Flow, Heat Transfer, Turbulence and Combustion. Elsevier (1983), 96–116
- (3) Lesieur, M. and O. Metais. "New trends in large-eddy simulations of turbulence". Annual Review of Fluid Mechanics 28.1 (1996), 45–82
- (4) Moin, P. and K. Mahesh. "Direct numerical simulation: a tool in turbulence research". Annual Review of Fluid Mechanics 30.1(1998), 539–578.
- (5) Mollo-Christensen, E. "Jet noise and shear flow instability seen from an experimenter's viewpoint". J. Appl. Mech. 34(1967), 1–7
- (6) Crow, S. C. and F. H. Champagne. "Orderly structure in jet turbulence". J. Fluid Mech. 48.3 (1971), 547–591
- (7) Jordan, P., Colonius, T. "Wave packets and turbulent jet noise". Annu. Rev. Fluid Mech. 45 (2013), 173–195
- (8) Cavalieri, A.V.G., Jordan, P., Lesshafft, L. "Wave-packet models for jet dynamics and sound radiation". Appl. Mech. Rev. 71(2), 020802(2019)

- (9) Michalke, A. “Survey on jet instability theory”. *Prog. Aerosp. Sci.* 21 (1984), 159–199 665-685
- (10) Crighton, D.G., Gaster, M. “Stability of slowly diverging jet flow”. *J. Fluid Mech.* 77(2), (1976), 397–413
- (11) Gudmundsson, K., Colonius, T. “Instability wave models for the near-field fluctuations of turbulent jets”. *J. Fluid Mech.* 689 (2011), 97-128
- (12) Tam, C.K.W. “Supersonic jet noise”. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 27(1), (1995), 17-43
- (13) Pickering, E., Colonius, T., Jordan, P., Towne, A. “Resolvent-based jet noise models: a projection approach.” *AIAA, Sci.* Jan. 6-10 (2020), 0999
- (14) Ozawa, Y., Nonomura, T., “Mach Number Effect on Resolvent Mode of Ideally Expanded Supersonic Jet” 30th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, June 4-7, (2024), 3200
- (15) Ozawa, Y., Ibuki, T., Nonomura, T., Suzuki, K., Komuro, A., Ando, A., and Asai, K. “Single-pixel resolution velocity/convection velocity field of a supersonic jet measured by particle/schlieren image velocimetry”. *Experiments in Fluids*, Vol.61, No.6, (2020)
- (16) Menter, F.R. “Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications”. *AIAA J.*, 32, (1994), 1598–1605
- (17) Ozawa, Y., Nonomura T. “Data Assimilation of Ideally Expanded Supersonic Jet Using RANS Simulation for High-Resolution PIV Data”. *Aerospace* 11, (2024), 291
- (18) Tan, D.J., Honnery, D., Kalyan, A., Gryazev, V., Karabasov, S.A., “Edgington-Mitchell, D. Correlation analysis of high-resolution particle image velocimetry data of screeching jets”. *AIAA J.*, 57, (2019), 735–748
- (19) Economon, T.D., Palacios, F., Copeland, S.R., Lukaczyk, T.W., Alonso, J.J. “SU2: An open-source suite for multiphysics simulation and design”. *AIAA J.*, 54, (2016), 828–846
- (20) Evensen, G., “The Ensemble Kalman Filter: theoretical formulation and practical implementation”. *Ocean Dynamics* 53, (2003), 343-367
- (21) Chu, B.T. “On the energy transfer to small disturbances in fluid flow (Part I)”. *Acta Mechanica* 1, (1965), 215-234
- (22) Martini, E., Schmidt, O. “Linstab2D: Stability and resolvent analysis of compressible viscous flows in MATLAB”. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 38, (2024),