

2A03 全体安定性解析を用いた極超音速境界層流れの不安定性評価に関する研究

○ 黒田 悠馬, 中村 悠斗, 佐藤 慎太郎, 大西 直文 (東北大)

Study on assesment of instabilities in hypersonic boundary layer flows using global stability analysis

Yuma KURODA, Yuto NAKAMURA, Shintaro SATO, and Naofumi OHNISHI (Tohoku Univ.)

Key Words : Hypersonic Flow, Global Stability Analysis, Dynamic Mode Decomposition

Abstract

Global stability analysis was performed on a simple hypersonic flow around the cone of HIFiRE-1 using a matrix-free time-stepping iterative approach combined with Dynamic Mode Decomposition (DMD). The eigenvalues obtained in this study exhibited positive growth rates within a specific frequency band, and the corresponding eigenmode distributions were found to have characteristics similar to those of Mack's second mode, which is known to be dominant in hypersonic flow. On the other hand, a comparison of eigenvalues obtained under different low-rank truncation settings in DMD revealed that the eigenvalues did not converge under the conditions employed in this study. For a more detailed analysis of the physically meaningful modes obtained in this study, it is essential to carefully select various key parameters and to robustly use global stability analysis.

1. 緒言

宇宙機が大気圏再突入する際、機体周りの流れはマッハ数 5 以上の極超音速に達し、激しい空力加熱に曝される。そのため、通常機体は熱防御システム (TPS: Thermal Protection System) によって保護される^[1]。しかし、TPS は容易に機体重量増加を招くため、空力加熱に対し適切に設計される必要がある。一方、境界層流の乱流遷移により空力加熱量が大幅に増加することがよく知られており^[2]、TPS 設計のための正確な空力加熱予測には遷移点の予測が大きな鍵となっている。

乱流遷移に至る機構として、微小擾乱が特定の流体不安定性によって線形成長し、他のモードとの干渉による三次元化や非線形成長を経て、乱流遷移することが知られている。そこで、擾乱成長の初期段階においては振幅が小さく、その非線形性を無視できると仮定した線形安定性理論 (LST: Linear Stability Theory) に基づく局所安定性解析が古くから行われている。一方で、簡便な LST では局所平行流近似が必要で、解析可能な流れ場が限定される。これに対し、支配方程式への近似なしに流れ場全体を対象にできる安定性解析として、全体安定性解析が提案されている^[3]。

一般に、安定性解析では以下に示す、基本流 q_b 周りで線形化された作用素 A に対する摂動 $\tilde{q}(t, \mathbf{x})$ の時間発展方程式に基づく。

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = \left. \frac{\partial \mathcal{F}(q)}{\partial q} \right|_{q=q_b} \tilde{q} \equiv A \tilde{q}. \quad (1)$$

ここで、 \mathcal{F} は Navier-Stokes 方程式における離散項に

対応するベクトルである。全体安定性解析はこの線形作用素 A に関する固有値問題を解くことに帰着する。しかし、一般にこの行列 A のサイズは非常に大規模であり直接的に扱うことは困難であるため、様々な手法による試みがなされている^[3]。

代表的手法に Arnoldi 法や Shift-invert 法がある^[3]。これらは陽に行列 A を構築できることが前提で、Matrix-forming method とも呼ばれる。しかし、行列 A は実用上は境界条件などを含む離散化に基づくため、三次元流れや極超音速流れのように、方程式やその離散化が複雑になるほどその導出や実装が困難になる^{[4],[5]}。

これらの Matrix-forming method に対し、行列 A の陽な構築を避ける手法は Matrix-free method と呼ばれており、行列 A の代わりに行列ベクトル積 $A\tilde{q}$ を用いる方法が考えられている。Chiba らによって提案された Time-stepping 法^{[5],[6]} は数値流体力学 (CFD: Computational Fluid Dynamics) の時間発展から、行列ベクトル積 $A\tilde{q}$ を取得し、Krylov 部分空間を構築する matrix-free method であり、近年多くの応用例が報告されている^{[7]-[9]}。この手法は既存のソルバーをブラックボックスとして扱うことができるため、実装のハードルを大きく下げる。また、極超音速流れを対象とする場合、熱化学的非平衡性を考慮した複雑な流れ場の方程式に対し線形化などを施すことなくそのまま利用できることは大きな利点である。一方で、取得する行列ベクトル積 $A\tilde{q}$ は通常一次精度の近似で表され、良好な近似を得るにはパラメータを注意して選定する必要がある^{[10],[11]}。また、この手法を用いた多くの研究は Arnoldi 法によりモード抽出が行われている

が、構築する Krylov 部分空間の次元が大きくなるほど、正規直交化処理による計算コストおよびメモリ使用量の増加を招く上、物理的に存在する固有モードの数に対して過剰なサイズの行列を解くことになり、計算が破綻しやすくなる。その一方で、固有値を収束させるためには十分な反復回数が必要とされる。以上のように、Chiba による Time-stepping 法は複数存在するパラメータの適切な設定が課題として現在も残っている。

そこで、Arnoldi 法を代替するモード抽出手法として、Ranjan らは動的モード分解(DMD: Dynamic Mode Decomposition)の利用を提案している^[11]。DMD では低次元化に用いる部分空間が Krylov 部分空間に制限されず、正規直交化処理やスペクトル変換などの煩雑な処理を回避できる。Ranjan らによると、この手法は Arnoldi 法ベースの全体安定性解析と比較して、モードの収束性は劣るものの、データセットの生成および処理が容易かつ柔軟な上、適切な変数選択によってメモリ使用量の大幅な削減を実現しつつ、良好な精度を達成できる^[11]。さらに、Time-stepping 法と Arnoldi 法に基づくそれぞれの処理は独立していないのに対し、DMD を用いたこの手法では、Time-stepping 法と DMD によるモード抽出のそれぞれの処理が完全に独立する。したがって、コードの実装やパラメトリックスタディの容易さなど実用上の柔軟性も高い。

しかし、これらの全体安定性解析が極超音速流れに対して応用された例は未だ少なく、その方法論は十分確立されていない。

そこで、本研究では Ranjan らによる DMD を用いた Time-stepping 法に基づく全体安定性解析^[11]に着目し、これを極超音速境界層に対し適用することを目的とする。本稿では、単純形状である円錐周りにおける極超音速境界層に対し全体安定性解析を行う。

2. 流れ場の数値計算手法

本計算では、支配方程式として以下の二次元軸対称圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{vis}})}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\text{vis}})}{\partial y} + \frac{1}{y}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{\text{vis}}) = \mathbf{W}. \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{Q} は保存量ベクトル、 \mathbf{F} , \mathbf{G} は対流流束ベクトル、 \mathbf{F}_{vis} , \mathbf{G}_{vis} は粘性流束ベクトル、 \mathbf{H} , \mathbf{H}_{vis} はそれぞれ三次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式の軸対称化に伴い生じる対流流束ベクトルと粘性流束ベクトル、 \mathbf{W} は生成項である。

支配方程式は、セル中心有限体積法に基づいて離散化し、オイラー陽解法を用いて時間進行する。また、数値流束評価には AUSM-DV スキーム^[12]を用い、MUSCL 法^[13]により空間 2 次精度化する。粘性流束評価には 2 次精度中心差分を採用する。さらに、熱化学的非平衡を考慮した際の熱化学モデルとして、5 化学種の Park の 2 温度モデル^[14]を用いた。

3. 全体安定性解析手法

全体安定性解析とは、流れ場全体を対象とした安定性解析手法の一つである。ここでは、本研究で用いた DMD を利用した Time-stepping 法に基づく全体安定性解析の手法について述べる。

3-1 全体安定性解析の定式化

離散化された二次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式に基づく数値解の時間発展は、以下のように記述できる。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathbf{q}), \quad (3)$$

$$\mathbf{q} = (\rho_1, (\rho u)_1, (\rho v)_1, E_1, \dots, \rho_N, (\rho u)_N, (\rho v)_N, E_N). \quad (4)$$

ここで、 \mathcal{F} は空間微分項を一般化したベクトルである。本研究では、各格子点上の 4 つの保存量を並べたベクトルを \mathbf{q} とする。なお、 N は格子点の総数であり、 ρ は密度、 u , v は速度ベクトルの x 方向成分及び y 方向成分、 E は単位体積あたりの全エネルギーを表す。

全体安定性解析では、与えられた基本流 \mathbf{q}_b 周りの摂動 $\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x})$ を考える。この摂動が基本流に対してはるかに小さいとすると、摂動 $\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x})$ の時間発展方程式として先に示す式 (1) が導出される。行列 \mathbf{A} の時間変化が十分小さいと仮定すると、式 (1) の解は以下のように表せる。

$$\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) = \sum_i c_i \hat{\mathbf{q}}_i(\mathbf{x}) \exp(\lambda_{A,i} t). \quad (5)$$

なお、 c_i は係数であり、 $\hat{\mathbf{q}}_i$ は i 番目のモードの空間分布を表す。 $\lambda_{A,i}$ は

$$\lambda_{A,i} = \sigma_i + i\omega_i, \quad (6)$$

として、実部 σ_i はモードの成長率、虚部 ω_i はモードの角周波数をそれぞれ表す。さらに、式 (1) と式 (5) から以下の固有値問題に帰着される。

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{q}} = \lambda \hat{\mathbf{q}}. \quad (7)$$

したがって、この固有値問題を解くことにより、モード形状を表す $\hat{\mathbf{q}}$ を固有ベクトル、モードの成長率及び周波数を表す λ を固有値として取得することができ、流れ場全体の安定性を調べることが可能となる。なお、流れの安定性は以下のように分類される。

$$\text{Real}(\lambda) \begin{cases} > 0 & \text{不安定} \\ = 0 & \text{中立安定} \\ < 0 & \text{安定} \end{cases}$$

3-2 Time-stepping 法^{[5],[11]}

Time-stepping 法では、CFD により得られた基本流に人工的な微小擾乱を加え、再度 CFD で時間発展させることで、行列ベクトル積 $\mathbf{A} \tilde{\mathbf{q}}$ を数値的に取得し、行列 \mathbf{A} を近似的に表現する。

まず、基本流に付加する初期擾乱 \tilde{q}_0 を以下のよう
に定める。

$$\tilde{q}_0 = \epsilon_0 \|q_b\| \frac{r_0}{\|r_0\|}. \quad (8)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを表す。また、 ϵ_0 は擾
乱の大きさを定めるパラメータであり、 r_0 は乱数ベク
トルである。

次に、初期擾乱 \tilde{q}_0 を付加した流れ場 $q_0 = q_b + \tilde{q}_0$ を
数値計算により時間発展する。なお、積分時間を ΔT
とする。ここで、数値計算による時間発展を表現する
行列を A_{CFD} とすると、時間発展後の流れ場 q'_0 は以
下の式で表される。

$$q'_0(t_0 + \Delta T) = A_{CFD} q_0. \quad (9)$$

そして、行列 A を近似するデータセットを得るた
め、同様の操作を n 回繰り返す。ただし、以降 ($n > 1$)
の擾乱は以下のように定める。

$$\tilde{q}_n = \epsilon_0 \|q_b\| \frac{q'_{n-1} - q_b}{\|q'_{n-1} - q_b\|}. \quad (10)$$

このようにして、以下に示す DMD に必要なデー
タセット X, X' を得る。

$$X = [q_{N_s}, q_{N_s+1}, \dots, q_{M+N_s-1}], \quad (11)$$

$$X' = [q'_{N_s}, q'_{N_s+1}, \dots, q'_{M+N_s-1}]. \quad (12)$$

ただし、 N_s はスナップショットとして用いる始めの
データまでに必要な反復回数を表し、 M は X および
 X' をそれぞれ構成するスナップショット枚数を表す。

3-3 DMD によるモード抽出 [15], [16]

入力データ X, X' が線形作用素である行列 A に
よる時間発展に従うモードの重ね合わせであると仮定す
ると、行列 A は入力データ X, X' を用いて以下の式で
表される。

$$A = X'X^\dagger. \quad (13)$$

ただし、上付きの \dagger は擬逆行列を表す。数値計算で
は X を特異値分解 (SVD: Singular Value Decomposi-
tion) により以下のように近似する。

$$X \approx U_r S_r V_r^T. \quad (14)$$

ここで、 r は低次元化後の次元であり、 U_r および V_r^T
はそれぞれ左右特異ベクトル、 S_r は X の特異値から成
る対角行列である。さらに、これらを用いると行列 A は

$$\tilde{A} = U_r^T X' V_r S_r^{-1}, \quad (15)$$

で表される行列 \tilde{A} に近似でき、この行列の固有値・固
有ベクトルを行列 A の近似固有値・固有ベクトルとし
て求める。なお、行列 \tilde{A} の固有値 λ は以下の関係か

ら、成長率 σ および角周波数 ω に変換できる。

$$\sigma = \frac{\text{Real}(\lambda)}{\Delta T}, \quad (16)$$

$$\omega = \frac{\text{Imag}(\lambda)}{\Delta T}. \quad (17)$$

ただし、 ΔT はスナップショット間隔である。また、固
有モード \hat{q} は行列 \tilde{A} の固有ベクトル $\tilde{\varphi}$ から以下のよ
うにして得る [16]。

$$\hat{q} = \lambda^{-1} X' V_r S_r^{-1} \tilde{\varphi}. \quad (18)$$

4. 計算条件

4-1 数値計算条件

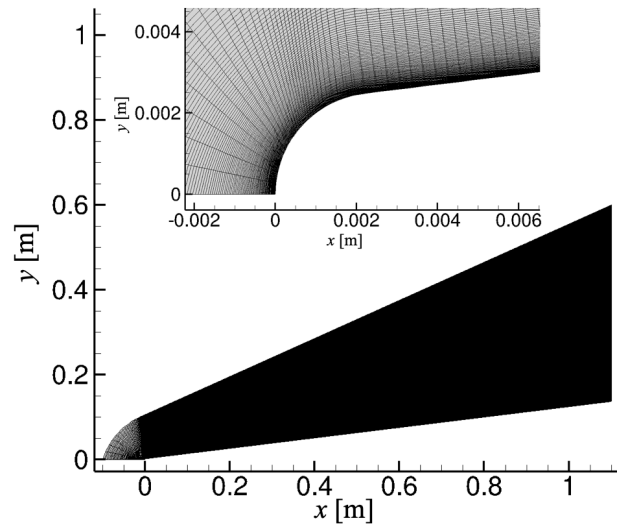


Fig. 1: 計算領域および計算格子。

本研究で用いる対象形状は HiFiRE-1 と互換の円錐
形状モデルであり、全長 1100 mm、半頂角 7° 、先端は
半径 2.5 mm の球形状となっている。

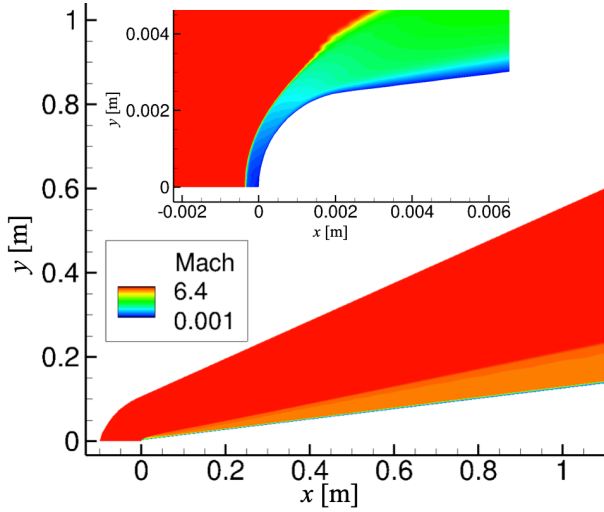
計算格子は流れ方向に 3721 点、壁面垂直方向に 201
点の二次元構造格子とした。計算領域および計算格子
を Fig. 1 に示す。

また、境界層内における格子解像度を十分高くす
るため、 y 方向最小格子幅を以下の式に基づき定めた
[17]。ただし、特にモード分布の解像にはより細かい格
子が必要であると考え、文献 [17] よりも 10 倍細かく
設定している。

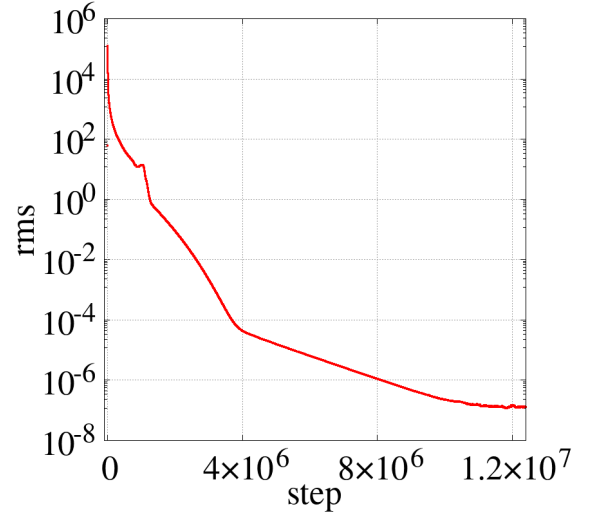
$$\Delta y_{\min} = L_{\text{ref}} \frac{0.01}{\sqrt{Re_u L_{\text{ref}}}}. \quad (19)$$

ここで、代表長 L_{ref} はモデル形状の全長とする。 Re_u
は単位レイノルズ数を表し、 $Re_u = Re/L_{\text{ref}}$ で与える。

流れ場の主流条件は、Tanno ら [18], [19] により HI-
EST で行われた HiFiRE-1 の実験条件 (Shot Number
#1721) で、松瀬 [20] により全体安定性解析が行われた
条件を用いる。これを Table 1 に示す。なお、 Re_u はモ



(a) マッハ数分布



(b) 密度残差履歴

Fig. 2: 数値計算により得られた基本流.

デル形状全長に対する単位レイノルズ数, Ma は主流マッハ数, H_0 は x 方向主流速度, $T_{t\infty}$ は主流の並進・回転温度, $T_{v\infty}$ は主流の振動・電子励起温度, ρ_∞ は主流密度, U_∞ は主流速度である. ただし, モデル壁面は断熱壁とした.

Table 1: 主流条件 [18],[20]

Parameter	#1721
Re_u [1/m]	1.633×10^6
Ma	6.489
H_0 [MJ/kg]	8.169
$T_{t\infty}$ [K]	839.5
$T_{v\infty}$ [K]	851.9
ρ_∞ [kg/m ³]	0.01661
U_∞ [m/s]	3730.2

4.2 全体安定性解析条件

Time-stepping 法における積分時間 T は主流速度で流体が 1 mm 進む時間 [20] を積分時間 T_1 とし, スナップショットとして用いる始めのデータまでに必要な反復回数 N_s は 0 とし, スナップショット枚数 M は 500 枚とした. また, 初期擾乱は式 (8) に従うが, 詳細には生成した乱数ベクトルに対し, 主流値を並べた以下のベクトルを掛けることで式 (8) のベクトル \mathbf{r} とした.

$$\mathbf{q}_\infty = (\rho_\infty, (\rho u)_\infty, (\rho v)_\infty, E_\infty, \dots, \rho_\infty, (\rho u)_\infty, (\rho v)_\infty, E_\infty). \quad (20)$$

これは数値計算が有次元で行われるため, 初期擾乱に各物理量のオーダーの情報を反映させる操作である. なお, 擾乱の大きさを調節するパラメータ ϵ_0 は本稿では 10^{-4} とする.

5. 結果と考察

5-1 基本流の取得

まず, Fig. 2(a) に数値計算により得られた流れ場のマッハ数分布を示す. また, Fig. 2(b) は基本流取得までの密度残差履歴を表しており, 約 1200 万ステップで 12 桁ほど残差が落ちている. これより, この時点の瞬時場が CFD の時間発展によって変動する量は, 全体安定性解析において付加する擾乱による変動に対し十分無視できると考えられるため, これを基本流として用いることとする.

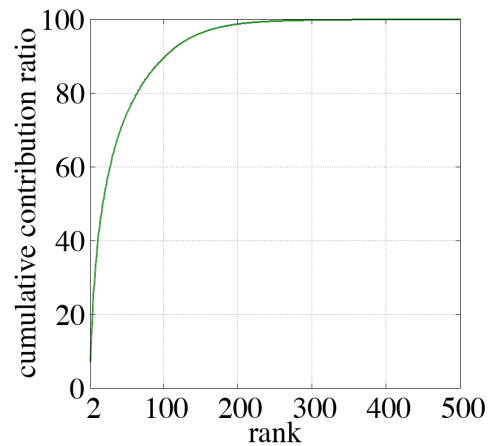


Fig. 3: 累積寄与率の推移.

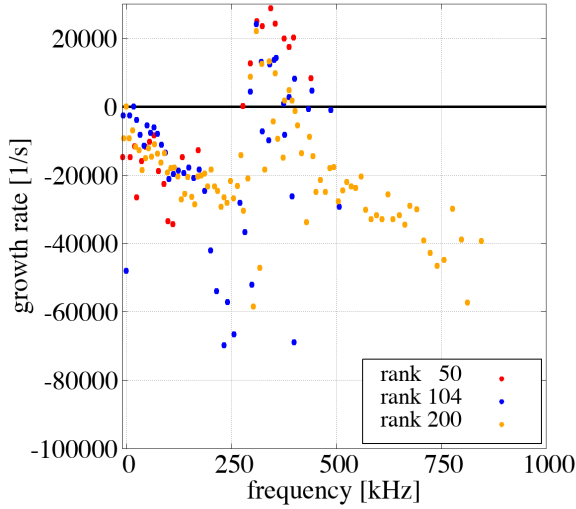


Fig. 4: 固有値分布.

5-2 固有値および固有モードの抽出

前項で得られた基本流を用い、Time-stepping 法に基づいて DMD に必要なデータセットを取得し、固有値および固有モードを抽出した。

まず、DMD において低次元化行列のランクを定めるため、上位 r 次元までの累積寄与率を η_r で表し、特異値 $s_i (i = 1, \dots, M)$ の二乗量を用いた次式で定めた。

$$\eta_r = \frac{\sum_{i=2}^r s_i^2}{\sum_{i=2}^M s_i^2}. \quad (21)$$

累積寄与率の推移を Fig. 3 に示す。ただし、本研究で用いた DMD のデータセットは基本流を含む流れ場データであるため、基本流に対応するモードが算出されるが、本研究での条件では基本流に対応するモードの特異値 s_1 が極めて大きく、寄与率の算出では除いている。

Fig. 3 より、特異値は広い範囲のモードに分散していることがわかった。本研究では特に不安定モードが重要であり、それらを正確に抽出できれば少ない次元であるほうが望ましい。そこで、固有値の収束性に着目し異なるランクを用いた場合の結果の比較を行う。本稿では、ランクを 50, 104, 200 として得られた固有値分布を Fig. 4 に示す。なお、累積寄与率が 90% に達したときのランクが 104 である。Fig. 4 を見ると、ランクを変更することによって固有値分布が変動しており、固有値は完全には収束していないことがわかった。先行研究^[11]で言及されているように Arnoldi 法ベースの Time-Stepping 法と比較して収束性が劣るため、より多くのスナップショット数を必要としていると推測される。

一方で、分布全体の傾向としては同様のものを捉えており、特にいずれの場合でも 250 kHz から 500 kHz の範囲で正の成長率を持つ固有値が複数存在していることがわかる。そこで、本稿ではランクを 104 とした

ときに 250 kHz から 500 kHz の範囲で得られた正の成長率を持つ固有値に着目し、それらに対応するモード分布を調査する。不安定モードの代表として、周波数 $f = 295.9, 357.4, 442.1$ kHz の 3 つのモードの ρu 成分分布の特徴的構造を Fig. 5 に示す。ここで着目しているいずれのモードも壁面に沿って周期的な構造が局所的に見られた。また、周波数ごとの違いに焦点を当てると、低周波数のモードで見られる構造ほど cone 形状の下流に現れる傾向が確認された。これらのモードの特徴は、極超音速域で支配的な不安定波である Mack の二次モード^[21]で知られている性質と類似するため、これらのモードは物理的な現象を捉えたものであることが示唆される。したがって、DMD ベースの Time-stepping 法に基づく全体安定性解析手法は、本研究の条件では固有値の収束までは確認できなかったものの、極超音速流れにおいて物理的に重要であるモードを優先的に抽出可能であることが示唆された。

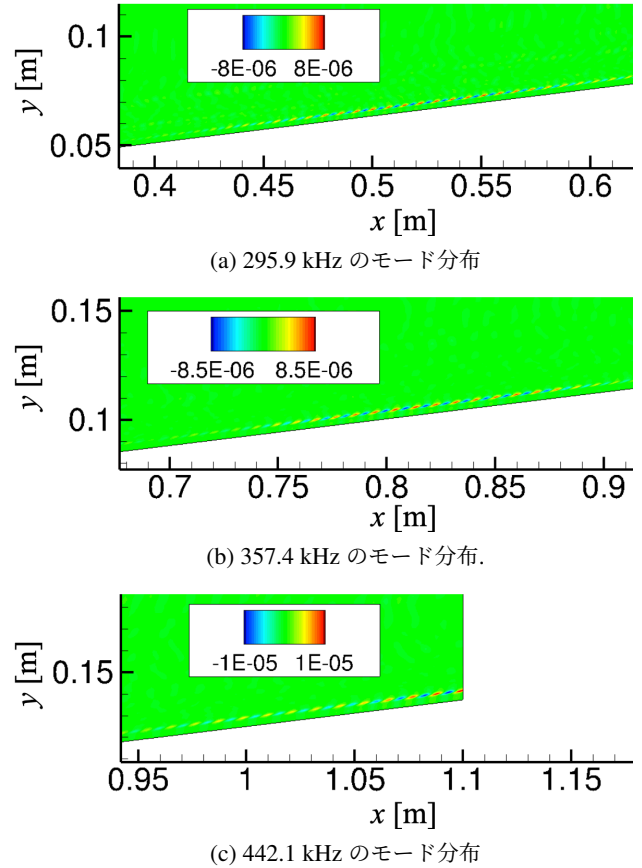


Fig. 5: 得られた不安定モードの ρu 成分分布の特徴的構造.

6. 結論

単純形状である HIFiRE-1 の円錐モデル周りの極超音速流れに対し、DMD を利用した Time-stepping 法に基づいた全体安定性解析を行った。

本稿では、スナップショット枚数 M を 500 とした

とき、低ランク行列のサイズを変えることによる固有値分布の比較を行った。その結果、本稿で用いた条件では固有値は収束していないことがわかり、極超音速境界層流れのモード抽出は完全には達成されなかったものの、本手法により物理的に重要と考えられるモードが優先的に抽出されていることが示唆された。先行研究でも示されているようにスナップショット枚数を十分に取ることで改善の見込みがある。また、Time-stepping 法に基づいて得られるデータセットのうち先頭から一定区間をスキップしてスナップショットに用いることで、擾乱の減衰および発達が十分進んだ流れ場に対して DMD することができ、固有値の収束性を高めることができると考えられる。今後は、本稿で確認された特徴的構造と Mack の二次モードとの関連性について詳細な調査を行うほか、上述したパラメータの変更などを通し、極超音速境界層流れにおいて不安定な Global モード抽出を堅牢に実現する方法論の調査を進める。

参考文献

- [1] D. E. Glass, AIAA Paper 2008-2682, 2008.
- [2] 久保田弘敏, 鈴木宏二郎, 綿貫忠晴, 宇宙飛行体の熱気体力学, 東京大学出版会, 2002.
- [3] V. Theofilis, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 43, 2011, pp. 319-352.
- [4] Y. Ohmichi and K. Suzuki, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 80, 2016, pp. 614-627.
- [5] 千葉賢, 日本数値流体力学会誌, Vol. 7, 1998, pp. 20-48.
- [6] 千葉賢, 日本流体力学会誌「ながれ」, Vol. 15, 1996, pp. 295-307.
- [7] Y. Ohmichi, Ph.D. Thesis, The University of Tokyo, 2014.
- [8] Y. Ohmichi and K. Suzuki, AIAA Paper 2013-3206, 2013.
- [9] J. D. Crouch et al., Journal of Computational Physics, Vol. 224, 2007, pp. 924-940.
- [10] F. Gómez et al., Aerospace Science and Technology, Vol. 32, 2014, pp. 223-234.
- [11] R. Ranjan et al., Journal of Computational Physics, Vol. 403, 2020, 109076.
- [12] Y. Wada and M. S. Liou, AIAA Paper 94-0083, 1994.
- [13] B. van Leer, Journal of Computational Physics, Vol. 32, 1979, pp. 101-136.
- [14] C. Park, John Wiley and Sons, 1989.
- [15] P. J. Schmid, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 656, 2010, pp. 5-28.
- [16] J. H. Tu, Ph.D. thesis, Princeton University, 2013.
- [17] 藤井孝藏, 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 2010.
- [18] H. Tanno et al., Proceedings of NATO RTO, RTO-MP-AVT-200, 2012.
- [19] H. Tanno et al., AIAA Paper 2009-781, 2009.
- [20] 松瀬祐二, 東北大学大学院修士学位論文, 2016.
- [21] L. M. Mack, Jet Propulsion Laboratory Report 900-277, Rev. A, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1969.